Der relative Satz von Schanuel

Christian Christensen Walter Gubler

26. März 2008

Zusammenfassung

In this paper we count the number of linear subspaces L of $\mathbb{P}_K^N$ defined over the number field K and with Arakelov height bounded by T. This generalizes the well-known Theorem of Schanuel which handles the case $L = \mathbb{P}_K^N$. We emphasize the dependence on L in our formula which holds for all $T \geq 1$.

Mathematical subject classification (2000): **11G50**, 14G40

Einleitung

In der diophantischen Geometrie will man die ganzzahligen Lösungen von polynomialen Gleichungen quantitativ und qualitativ beschreiben. Übersetzt man diophantische Gleichungen geometrisch, so beschreiben die komplexen Lösungen eine algebraische Varietät, und wir suchen die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Wenn man homogene Gleichungen betrachtet, dann bildet die Nullstellenmenge eine projektive Varietät und die ganzzahligen Lösungen entsprechen den rationalen Lösungen bis auf Vielfache.
Im Jahre 1922 vermutete Louis Joel Mordell, dass die Zahl der rationalen Punkte endlich ist, wenn die komplexe Lösungsmenge eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht größer als Eins bildet. Diese Mordell Vermutung wurde 1983 von Gerd Faltings über beliebigen Zahlkörpern bewiesen. Faltings hat für diese Leistung 1986 die Fieldsmedaille erhalten. Beim Beweis der Mordell Vermutung spielt die Größe der Lösungen die zentrale Rolle. Diese Größe wird Höhe genannt und wir werden sie im zweiten Abschnitt definieren. Wir möchten hier nur betonen, dass wir immer mit der absoluten Arakelov Höhe arbeiten, die unabhängig von der Wahl des Zahlkörpers ist und besonders gute Eigenschaften hat. Mittels dieses Begriffs ist es nun möglich, Lösungen sinnvoll zu zählen und zu messen. Um dies praktisch nutzen zu können, ist es wichtig, dass man eine obere Schranke für die Höhe der Lösungen angeben kann. Mit einem genügend leistungsfähigen Rechn! er wäre es dann einfach, alle Zahlen bis zu dieser Schranke durchzuprobieren und so alle Lösungen zu finden. Dies ist aber meist sehr schwierig und so auch bei der Mordell Vermutung ungelöst.
Dieses Problem führt uns auf den allgemeinen Fall einer glatten projektiven Varietät X der Dimension n, die durch homogene Polynome mit Koeffizienten in einem fixierten Zahlkörper K gegeben sein soll. Die holomorphen n-Formen auf X bilden ein Geradenbündel $\Omega^{\wedge n}$. Falls dieses Geradenbündel ampel ist, dann erwartet man nach der berühmten Lang Vermutung, dass die K-rationalen Punkte von X, das heißt diejenigen mit Koordinaten in K, nicht dicht in X liegen (siehe [Lang3], Chapter I, für eine Übersicht). Im Fall der

Kurven ist $\Omega^{\wedge 1}$ genau dann ampel, wenn das Geschlecht der Kurve größer als Eins ist. Dies deckt sich mit der oben erwähnten Mordell Vermutung.
Falls $(\Omega^{\wedge n})^{-1}$ ampel ist, spricht man von einer Fano-Varietät und man erwartet, dass die F-rationalen Punkte dicht liegen für eine geeignete endliche Körpererweiterung F von K. In diesem Fall liefert die Manin Vermutung eine asymptotische Abschätzung für die Anzahl $\mathrm{N}(X_F, T)$ der F-rationalen Punkte in X, deren Arakelov Höhe kleiner gleich T ist. Die Körpererweiterung F/K ist nötig, weil es Fano-Varietäten ohne K-rationale Punkte gibt. Diese Manin Vermutung wurde im Laufe der Zeit von Victor V. Batyrev, Yuri Tschinkel und Emmanuel Peyre verfeinert und ist nur für wenige Fano-Varietäten gelöst. Für eine Übersicht verweisen wir auf [Pe].
Eine glatte Kubik in $\mathbb{P}_K^4$ ist eine Fano-Varietät. Sie wird überdeckt durch eine 2-parametrige Geradenschar. In [BG], Theorem 11.10.11, wurde der Asymptotik der K-rationalen Punkte auf den über K definierten Geraden dieser Schar bestimmt. Man erwartet, dass dies auch die Asymptotik aller K-rationalen Punkte auf der Kubik entspricht, aber dies ist offen. Im Beweis dieses Theorems wurde der große Satz von Faltings und die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Schanuel benutzt.
Das einfachste Beispiel einer Fano-Varietät ist der projektive Raum, das heißt $X = \mathbb{P}_K^{N-1}$ für $N \geq 2$, wofür die Asymptotik schon lange bekannt ist. Der Fall $K = \mathbb{Q}$ ist von Richard Dedekind und Heinrich Weber untersucht worden und wurde später von Wolfgang M. Schmidt auf Grassmann-Varietäten erweitert. Für einen beliebigen Zahlkörper K wurde die Asymptotik von $\mathrm{N}(\mathbb{P}_K^{N-1}, T)$ von Stephen H. Schanuel 1979 bestimmt (siehe [Scha]).
Wir beweisen in dieser Arbeit folgende relative Version dieses Satzes. Es sei d der Grad von K, r bzw. s die Anzahl der reellen bzw. komplexen Einbettungen, R der Regulator, $D_{K/\mathbb{Q}}$ der Absolutbetrag der Diskriminante, ω die Anzahl der Einheitswurzeln, h die Klassenzahl und ζ_K die Dedekindsche Zetafunktion (siehe [Ko] für die Definitionen). Seien weiter W ein n-dimensionaler Unterraum von K^N, $\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)$ die Arakelov Höhe des durch W induzierten projektiven linearen Unterraums L und $\alpha(n) = \pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$. Weiter sei λ_1 das erste sukzessive Minimum des Gitters $W \cap \mathfrak{o}_K^N$, bezüglich der geometrischen Darstellung in $\mathbb{R}^{Nd}$ (siehe 3.8). Dann gilt:

Relativer Satz von Schanuel 0.1. *Für die Anzahl* $\mathrm{N}(L,T)$ *der K-rationalen Punkte in L mit Arakelov Höhe beschränkt durch T gilt*

$$\mathrm{N}(L,T) = h \cdot \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \cdot \left(\frac{T^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)}\right)^d + \begin{cases} O\left(\frac{T}{\lambda_1}\left(1+\log^+\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)\right)\right) & \textit{für } d=1, n=2 \\ O\left(\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)^{nd-1}\right) & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von n und K abhängen darf und

$$c_n = \frac{R}{\omega}\, \mathrm{D}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}^{-n/2}\, n^{r+s-1} \alpha(n)^r \{2^n \alpha(2n)\}^s.$$

Wie oben erwähnt hat Schanuel den Fall $n = N$ bewiesen. Dann ist $W = \mathbb{P}_K^{N-1}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L) = 1$ und λ_1 spielt wegen der absoluten Situation keine Rolle. Zusätzlich hat Schanuel die Weil Höhe statt der Arakelov Höhe benutzt, was die Konstante c_n unwesentlich ändert (siehe [Scha], Theorem 1). Der relative Satz von Schanuel wurde in [BG], Theorem 11.10.14 formuliert. Der Beweis wurde nur im Fall $K = \mathbb{Q}$ gegeben und sei dem Leser als Einstieg in diese Arbeit empfohlen um die Beweisidee im allgemeinen Fall besser zu verstehen.
Ähnlich explizite relative Asymptotiken hat Jeffrey Lin Thunder 1992 in [Th2] für Grassmann-Varietäten und 1993 in [Th3] für Fahnenvarietäten bewiesen. Im Unterschied zu

Satz 0.1 gelten die Resultate von Thunder nur für $T \to \infty$. Dies genügt aber nicht, um die oben erwähnte Anwendung für die glatte Kubik in $\mathbb{P}^4_K$ beweisen zu können.

Im 1. Abschnitt legen wir die Terminologie fest und führen die Dedekindsche Zetafunktion ein. Im 2. Abschnitt definieren wir die Arakelov Höhe eines Punktes und eines Unterraumes im projektiven Raum. Anschließend verallgemeinern wir ein wichtiges Resultat von Schmidt, dass die Arakelov Höhe eines Unterraumes mit dem Volumen eines Gitters verbindet. Dann führen wir zwei verschiedene sukzessive Minima ein und vergleichen sie. Zum Schluß des Abschnitts beweisen wir ein zentrales Lemma aus der Geometrie der Zahlen, das das Verhalten einer messbaren Menge Ω mit der Asymptotik der Gitterpunkte in $T\Omega$ für $T \to \infty$ verbindet.
Im 3. Abschnitt beginnen wir mit den Vorarbeiten für den Beweis von Satz 0.1, indem wir den Divisorensatz von Schanuel auf die relative Situation verallgemeinern. In einem ersten Schritt reduzieren wir die Aussage auf das Problem, die Anzahl von Gitterpunkten in einem bestimmten beschränkten Gebiet eines gegebenen euklidischen Raumes zu zählen. Dazu ist das im 2. Abschnitt untersuchte Lemma aus der Geometrie der Zahlen nötig. Um dann den Beweis des Divisorensatzes abzuschließen, müssen wir das Lebesguemaß des oben genannten Gebietes berechnen.
Im 4. Abschnitt übersetzen wir den Divisorensatz in eine Aussage für alle Punkte in L und erhalten damit den relativen Satz von Schanuel. Dazu führen wir zunächst eine Inversion über alle Ideale durch, mit der sich anschließend der Beweis von Satz 0.1 durch eine kurze Rechnung beenden lässt.

1 Terminologie und Grundlagen

In der Mengentheorie bedeutet $A \subset B$, dass A eine Teilmenge von B ist, wobei auch $A = B$ zugelassen ist. Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null. Die untere Gaußklammer $\lfloor x \rfloor$, definiert für $x \in \mathbb{R}$, ist die größte ganze Zahl $\leq x$. Entsprechend ist die obere Gaußklammer $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geq x$.
Für zwei Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$, wobei X ein topologischer Raum, bedeutet das Landau-Symbol $f(x) = O(g(x))$, dass $|f(x)| \leq Cg(x)$ für eine positive Konstante C gilt.
K steht für einen Zahlkörper, das heißt eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$. Wir setzen $d := [K : \mathbb{Q}]$, das heißt der Grad der Körpererweiterung von K über $\mathbb{Q}$ ist d. Für $N \in \mathbb{N}$ sei K^N das kartesische Produkt $K \times \ldots \times K$. Weiter steht X für ein N-Tupel $(x_1, \ldots, x_N) \in K^N$. Insbesondere setzen wir $0^N := (0, \ldots, 0) \in K^N$. Den algebraischen Abschluß von $\mathbb{Q}$ bezeichen wir mit $\overline{\mathbb{Q}}$.
Mit $|.|_p$ bezeichnen wir die p-adischen Absolutbeträge und mit $|.|_\infty$ den üblichen Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Wir erinnern daran, dass $|.|_\infty$ der einzige archimedische Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ ist. Das heißt, er erfüllt nicht die ultrametrische Dreiecksungleichung $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.
Für einen Absolutbetrag $|.|_\nu$ auf einem Körper K heißt K_ν die Vervollständigung von K. Die eindeutige Fortsetzung zu einem Absolutbetrag auf K_ν wird ebenfalls mit $|.|_\nu$ bezeichnet. Die Einschränkung des Absolutbetrages $|.|_\nu$ auf $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu einem p-adischen Absolutbetrag oder zu $|.|_\infty$. Wenn wir letzteren Fall mit $p = \infty$ bezeichnen, dann heißt $[K_\nu : \mathbb{Q}_p]$ der lokale Grad von ν und man hat die bekannte Summenformel

$$\sum_\nu [K_\nu : \mathbb{Q}_p] = [K : \mathbb{Q}], \tag{1}$$

wobei $|.|_\nu$ über alle Fortsetzungen von $|.|_p$ auf K läuft (vgl. [BG], Corollary 1.3.2).
Den projektiven Raum der Dimension $N-1$ über einen Zahlkörper K bezeichnen wir mit $\mathbb{P}_K^{N-1}$ und seine Elemente mit den homogenen Koordinaten $(x_1 : \ldots : x_N)$. Für einen nichttrivialen Unterraum W von K^N ist $\mathbb{P}_K(W) := \{(x_1 : \ldots : x_N) \in \mathbb{P}_K^N \mid X = (x_1, \ldots, x_N) \in W\}$ der durch W induzierte projektive lineare Unterraum. Er hat die Dimension $\dim(W) - 1$.
Wir übernehmen die gängigen Notationen für die algebraische Zahlentheorie aus dem Buch [Ko], unter anderem die Begriffe: Maximalordnung $\mathfrak{o}_K$, Klassenzahl h, Norm $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(.)$, Diskriminante $\mathrm{D}_{K/\mathbb{Q}}$ und Regulator R.

Definition 1.1. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ definieren wir die *Dedekindsche Zetafunktion*

$$\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a}} \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-s},$$

wobei $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$ die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$ ist und die Summe über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ läuft. Sie hat eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit einfachem Pol in $s = 1$. Für den Spezialfall $K = \mathbb{Q}$ erhalten wir die Riemannsche Zetafunktion.

Definition 1.2. Die *Möbiussche μ-Funktion für Ideale* ist definiert durch

$$\mu(\mathfrak{a}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{a} = \mathfrak{o}_K \\ (-1)^r & \text{für } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \text{ Produkt von verschiedenen Primidealen} \\ 0 & \text{sonst, das heißt } \mathfrak{a} \text{ teilbar durch ein Quadrat eines Primideals.} \end{cases}$$

Lemma 1.3. *Für* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *ist* $\zeta_K(s)$ *absolut konvergent und es gilt*

$$\frac{1}{\zeta_K(s)} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^s},$$

wobei $\mathfrak{a}$ *über alle ganzen Ideale von* K *läuft*

Beweis: Siehe [Nar], Chapter 7.1, Proposition 7.1 und Corollary 2. □

2 Höhen und Geometrie der Zahlen

Definition 2.1. Wir bezeichnen die Menge der Standardbeträge auf $\mathbb{Q}$ mit $M_\mathbb{Q} := \{|.|_p \mid p$ Primzahl oder $p = \infty\}$. Für so ein p und eine Fortsetzung $|.|_\omega$ von $|.|_p$ zu einem Absolutbetrag auf K definieren wir den *normierten Absolutbetrag* $|.|_\nu$ durch

$$|x|_\nu := |x|_\omega^{[K_\omega:\mathbb{Q}_p]/[K:\mathbb{Q}]}.$$

Sei M die Menge der Fortsetzungen von $M_\mathbb{Q}$ zu Absolutbeträgen auf $\overline{\mathbb{Q}}$ und M_K die Menge der normierten Fortsetzungen von $M_\mathbb{Q}$ auf K. Die Normierungen führen dazu, dass M_K für alle $x \in K \setminus \{0\}$ die Produktformel

$$\prod_{\nu \in M_K} |x|_\nu = 1 \tag{2}$$

erfüllt (siehe [BG], Proposition 1.4.4).

Definition 2.2. Für $X = (x_1, \dots, x_N) \in \overline{\mathbb{Q}}^N$ und $\nu \in M$ setzen wir

$$H_\nu(X) := \begin{cases} \max\limits_{1 \le i \le N} (|x_i|_\nu) & \text{falls } \nu \text{ nichtarchimedisch} \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{N} |x_i|_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}} & \text{falls } \nu \text{ archimedisch.} \end{cases}$$

Sei $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ ein Zahlkörper. Dann definieren wir für $X \in K^N$ und $\omega \in M_K$

$$H_\omega(X) := H_\nu(X)^{\frac{[K_\omega:\mathbb{Q}_p]}{[K:\mathbb{Q}]}},$$

wobei $[K_\omega : \mathbb{Q}_p]$ den lokalen Grad von ω bezeichnet und die Definition unabhängig ist von der Wahl der Fortsetzung $|.|_\nu \in M$ von $|.|_\omega^{[K:\mathbb{Q}]/[K_\omega:\mathbb{Q}_p]}$. Nun definieren wir die *Arakelov Höhe* für $P \in \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^{N-1}$ mit dem Repräsentanten $X \in K^N$ durch

$$\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(P) := \prod_{\omega \in M_K} H_\omega(X).$$

Bemerkung 2.3. Aus der Produktformel (siehe (2)) folgt, dass $\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(P)$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten X ist. Weiter ist die Definition von $\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(P)$ unabhängig von K (siehe [BG], Corollary 1.3.2) und deshalb wohldefiniert für alle Punkte in $\mathbb{P}_K^{N-1}$ mit Koordinaten in $\overline{\mathbb{Q}}$.

Definition 2.4. Sei W ein n-dimensionaler Unterraum von $\overline{\mathbb{Q}}^N$. Das n-te äußere Produkt $\wedge^n W$ ist ein eindimensionaler Unterraum von $\wedge^n(\overline{\mathbb{Q}}^N)$. Damit können wir W als Punkt P_W im projektiven Raum $\mathbb{P}_K(\wedge^n(\overline{\mathbb{Q}}^N))$ auffassen. Diesen können wir mit dem projektiven Raum der Dimension $\binom{N}{n}$ identifizieren, indem wir die Standardkoordinaten verwenden. Dann heißt

$$\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(W) := \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(P_W)$$

die *Arakelov Höhe von* W. Für die wesentlichen Eigenschaften der Arakelov Höhe eines Unterraumes verweisen wir auf [BG], Chapter 2.8.

Im Folgenden sei $\Phi : K^N \to \prod_\nu K_\nu^N \cong \mathbb{R}^{Nd}$ die Diagonaleinbettung, wobei der Index ν über alle archimedischen Elemente aus M_K läuft.

Theorem 2.5. *Sei W ein n-dimensionaler Unterraum von K^N. Φ bildet das K-Gitter $\Lambda := W \cap \mathfrak{o}_K^N$ in ein nd-dimensionales $\mathbb{R}$-Gitter Λ_∞ im Abschluss von $\Phi(W)$ in $\mathbb{R}^{Nd}$ ab. Weiter sei* $\mathrm{vol}(\Lambda_\infty)$ *das Volumen der Fundamentalmasche von $\overline{\Phi(W)}/\Lambda_\infty$ bezüglich des relativen Lebesguemaßes und s die Anzahl der komplexen Stellen von K. Dann gilt:*

$$2^{ns}\,\mathrm{vol}(\Lambda_\infty) = D_{K/\mathbb{Q}}^{n/2}\,\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(W)^d.$$

2.6. Unser Ziel ist es nun dieses Resultat von Schmidt (siehe [Schm], Theorem 1) zu verallgemeinern. Sei dazu für den Rest dieses Abschnitts W ein n-dimensionaler Unterraum von K^N und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{o}_K$. Mit $(\mathfrak{a})^N$ bezeichnen wir die Menge der N-Tupel von Elementen aus $\mathfrak{a}$. Auch hier bildet Φ das K-Gitter $\Lambda := W \cap (\mathfrak{a})^N$ in ein nd-dimensionales $\mathbb{R}$-Gitter Λ_∞ im Abschluss von $\Phi(W)$ in $\mathbb{R}^{Nd}$ ab. Weiter sei wie oben $\mathrm{vol}(\Lambda_\infty)$ das Volumen der Fundamentalmasche von $\overline{\Phi(W)}/\Lambda_\infty$ bezüglich des relativen Lebesguemaßes. Um nun eine zu Theorem 2.5 analoge Aussage für unser neues Gitter Λ_∞ zu erhalten, benötigen wir eine allgemeine Aussage über den Index von Moduln und ein technisches Lemma.

Proposition 2.7. *Sei M ein endlich erzeugter torsionsfreier $\mathfrak{o}_K$-Modul und N ein $\mathfrak{o}_K$-Untermodul von M mit endlichem Index. Für ein nichtarchimedisches $\nu \in M_K$ sei M_ν bzw. N_ν die Vervollständigung von M bzw. N bezüglich der ν-adischen Topologie. Dann gilt*

$$[M : N] = \prod_\nu [M_\nu : N_\nu],$$

wobei ν über alle nichtarchimedischen Elemente aus M_K läuft.

Beweis: 1. Schritt: $K = \mathbb{Q}$
Nach dem Elementarteilersatz gibt es eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von M und $\lambda_1|\lambda_2|\dots|\lambda_n \in \mathbb{N}$ so, dass $\lambda_1 b_1, \dots, \lambda_n b_n$ eine Basis von N ist. Es gilt: $[M : N] = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Weiter ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von M_ν und $\lambda_1 b_1, \dots, \lambda_n b_n$ eine Basis von N_ν. Nun sind die nichtarchimedischen Stellen für $\mathfrak{o}_\mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ die Primzahlen. Setze also $\nu = p$. Sei $\lambda_j = \prod_p p^{v_p(\lambda_j)}$ die Primfaktorisierung von λ_j, dann gilt:

$$M_p/N_p \cong \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z}_p/\lambda_j\mathbb{Z}_p = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z}_p/p^{v_p(\lambda_j)}\mathbb{Z}_p \quad \Rightarrow \quad [M_p : N_p] = \prod_{j=1}^n p^{v_p(\lambda_j)}$$

$$\Rightarrow \prod_p [M_p : N_p] = \prod_p \prod_j p^{v_p(\lambda_j)} = \prod_j \lambda_j.$$

2. Schritt: Allgemein
M und N sind als endlich erzeugte $\mathfrak{o}_K$-Moduln auch endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln. Es gilt für p prim, $\nu \in M_K$ und ν normierte Fortsetzung von p, welches wir hier durch $\nu|p$ kennzeichen:

$$\mathfrak{o}_K \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p \cong \prod_{\nu|p} (\mathfrak{o}_K)_\nu. \tag{3}$$

Denn es gilt $K \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_p \cong \prod_{\nu|p} K_\nu$ (vgl. [BG], Section 1.3) und $\mathfrak{o}_K \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p$ ist ein $\mathbb{Z}_p$-Untermodul von $\mathfrak{o}_K \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}_p = K \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_p$, weil $\mathfrak{o}_K$ ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul ist. Damit folgt die Inklusion „$\subset$" in (3) direkt. Die Gleichheit liefert uns der starke Approximationssatz (siehe [BG] Theorem 1.4.5). Wir benutzen die bekannte Isomorphie $M_\nu \cong M \otimes_{\mathfrak{o}_K} (\mathfrak{o}_K)_\nu$ und somit gilt:

$$\begin{aligned} M_p &\cong M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p \overset{M \cong M \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_K}{\cong} (M \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_K) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p \cong M \otimes_{\mathfrak{o}_K} (\mathfrak{o}_K \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p) \\ &\overset{(3)}{\cong} M \otimes_{\mathfrak{o}_K} \prod_{\nu|p} (\mathfrak{o}_K)_\nu \cong \prod_{\nu|p} M \otimes_{\mathfrak{o}_K} (\mathfrak{o}_K)_\nu \cong \prod_{\nu|p} M_\nu. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt mit dem 1. Schritt:

$$[M : N] = \prod_p [M_p : N_p] = \prod_p \left[\prod_{\nu|p} M_\nu : \prod_{\nu|p} N_\nu \right] = \prod_\nu [M_\nu : N_\nu]. \qquad \square$$

Lemma 2.8. *Es gilt* $\left[\left((\mathfrak{o}_K)^N \cap W \right) : \left((\mathfrak{a})^N \cap W \right) \right] = \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n$.

Beweis: Wir wählen ein nichtarchimedisches $\nu \in M_K$ und setzen $W_\nu := W \otimes_K K_\nu$. Natürlich ist W_ν auch die Vervollständigung von W bezüglich der Maximumsnorm $|X|_\nu := \max_{j=1,\dots,N}(|x_j|_\nu)$ auf K^N.

1. Schritt: $((\mathfrak{a})^N \cap W)_\nu = (\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu \subset K_\nu^N$
Offensichtlich gilt $(\mathfrak{a})^N \cap W \subset (\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu$ und damit $((\mathfrak{a})^N \cap W)_\nu \subset (\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu$. Sei $X \in (\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu$ und $\varepsilon > 0$. Eine Verallgemeinerung des starken Approximationssatzes (siehe [BG], Theorem 1.4.5) für W zeigt, dass $Y \in (\mathfrak{o}_K)^N \cap W$ mit $|X - Y|_\nu < \varepsilon$ existiert. Weiter dürfen wir in diesem Satz verlangen, dass $|Y|_\omega \leq |\mathfrak{a}|_\omega$ für die endlich vielen $\omega \in M_K$ mit $|\mathfrak{a}|_\omega < 1$. Dabei wird $|\mathfrak{a}|_\omega$ als der Betrag eines Erzeugenden von $(\mathfrak{a})_\omega$ erklärt. Damit folgt $Y \in (\mathfrak{a})^N$. Also können wir jedes Element $X \in (\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu$ durch Elemente aus $(\mathfrak{a})^N \cap W$ approximieren und erhalten „=" im 1. Schritt.
2. Schritt: $((\mathfrak{o}_K)^N \cap W)_\nu = (\mathfrak{o}_K)_\nu^N \cap W_\nu \subset K_\nu^N$
Folgt für $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_K$ aus dem 1. Schritt.
3. Schritt: $[((\mathfrak{o}_K)^N \cap W)_\nu : ((\mathfrak{a})^N \cap W)_\nu] = [(\mathfrak{o}_K)_\nu : (\mathfrak{a})_\nu]^n$
Nun gilt mit dem 1. und 2. Schritt:

$$\left[\Big((\mathfrak{o}_K)^N \cap W\Big)_\nu : \Big((\mathfrak{a})^N \cap W\Big)_\nu\right] = \left[\Big((\mathfrak{o}_K)_\nu^N \cap W_\nu\Big) : \Big((\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu\Big)\right].$$

Da $(\mathfrak{o}_K)_\nu$ ein Hauptidealbereich ist, können wir den Elementarteilersatz anwenden. Damit existiert eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $(\mathfrak{o}_K)_\nu^N \cap W_\nu$ so, dass $\lambda_1 b_1, \ldots, \lambda_n b_n$ eine Basis von $(\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu$ ist für $\lambda_1 | \lambda_2 | \ldots | \lambda_n \in (\mathfrak{o}_K)_\nu$. Es gilt $|b_j|_\nu = 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, denn sonst haben die Koordinaten einen nichttrivialen Teiler und b_j ist kein Teil einer Basis von $(\mathfrak{o}_K)_\nu^N \cap W_\nu$. Nun gilt $|\lambda_j b_j|_\nu = |\mathfrak{a}|_\nu$ mit demselben Argument wie vorher und deshalb $|\lambda_1|_\nu = \ldots = |\lambda_N|_\nu = |\mathfrak{a}|_\nu$. Es folgt $(\mathfrak{o}_K)_\nu \lambda_j = (\mathfrak{a})_\nu$. Jetzt können wir diese Argumente zusammensetzen und erhalten:

$$\begin{aligned}\left[\Big((\mathfrak{o}_K)_\nu^N \cap W_\nu\Big) : \Big((\mathfrak{a})_\nu^N \cap W_\nu\Big)\right] &= \left[\bigoplus_{j=1}^n (\mathfrak{o}_K)_\nu b_j \Big/ \bigoplus_{j=1}^n (\mathfrak{o}_K)_\nu \lambda_j b_j\right] \\ &= \prod_{j=1}^n [(\mathfrak{o}_K)_\nu : \lambda_j (\mathfrak{o}_K)_\nu] = [(\mathfrak{o}_K)_\nu : (\mathfrak{a})_\nu]^n.\end{aligned}$$

4. Schritt: $[((\mathfrak{o}_K)^N \cap W) : ((\mathfrak{a})^N \cap W)] = \mathrm{N_{K/\mathbb{Q}}}(\mathfrak{a})^n$

$$\begin{aligned}\left[\Big((\mathfrak{o}_K)^N \cap W\Big) : \Big((\mathfrak{a})^N \cap W\Big)\right] &\overset{2.7}{=} \prod_\nu \left[\Big((\mathfrak{o}_K)^N \cap W\Big)_\nu : \Big((\mathfrak{a})^N \cap W\Big)_\nu\right] \\ &\overset{\text{3. Schritt}}{=} \prod_\nu [(\mathfrak{o}_K)_\nu : (\mathfrak{a})_\nu]^n \overset{2.7}{=} [\mathfrak{o}_K : \mathfrak{a}]^n = \mathrm{N_{K/\mathbb{Q}}}(\mathfrak{a})^n,\end{aligned}$$

wobei ν über alle nichtarchimedischen Elemente aus M_K läuft. Für die letzte Gleichung verweisen wir auf [Ko], Satz 3.5.1. □

Theorem 2.9. *Unter den Voraussetzungen von 2.6 gilt:*

$$2^{ns}\,\mathrm{vol}(\Lambda_\infty) = \mathrm{D}_{K/\mathbb{Q}}^{n/2}\,\mathrm{H_{Ar}}(W)^d\,\mathrm{N_{K/\mathbb{Q}}}(\mathfrak{a})^n.$$

Beweis: Sowohl $(\mathfrak{o}_K)^N \cap W$ als auch $(\mathfrak{a})^N \cap W$ bilden ein K-Gitter in K^N. Nun gilt:

$$\frac{\mathrm{vol}(\Phi((\mathfrak{a})^N \cap W))}{\mathrm{vol}(\Phi((\mathfrak{o}_K)^N \cap W))} = \left[\Phi((\mathfrak{o}_K)^N \cap W) : \Phi((\mathfrak{a})^N \cap W)\right].$$

Jetzt wird der Index unter Φ nicht verändert. Also folgt:

$$\left[\Phi((\mathfrak{o}_K)^N \cap W) : \Phi((\mathfrak{a})^N \cap W)\right] = \left[((\mathfrak{o}_K)^N \cap W) : ((\mathfrak{a})^N \cap W)\right] \overset{2.8}{=} \mathrm{N_{K/\mathbb{Q}}}(\mathfrak{a})^n.$$

Zusammen ergibt das:

$$\operatorname{vol}(\Phi((\mathfrak{o}_K)^N \cap W)) = \frac{\operatorname{vol}(\Phi((\mathfrak{a})^N \cap W))}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n}.$$

Dies setzten wir in das Ergebnis aus Theorem 2.5 ein und erhalten mit $\Lambda_\infty = \Phi((\mathfrak{a})^N \cap W)$:

$$2^{ns}\operatorname{vol}(\Lambda_\infty) = \mathrm{D}_{K/\mathbb{Q}}^{n/2}\,\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(W)^d\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^n. \qquad \square$$

2.10. Es sei nun wieder $\Lambda := (\mathfrak{o}_K)^N \cap W$. Wir erinnern daran, dass das *erste sukzessive Minimum* λ_1 gleich der Länge des kürzesten Gittervektors in $\Lambda_\infty \setminus \{0^N\}$ bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^{Nd}$ ist. Wir definieren das *erste adelische sukzessive Minimum* als

$$H_1 := \min\{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(X) \mid X \in \Lambda \setminus \{0^N\}\}.$$

Nach dem Satz von Northcott (siehe [BG], Theorem 2.4.9) gibt es nur endlich viele Punkte von beschränkter Höhe und damit wird das Minimum wirklich erreicht. Zur allgemeinen Definition von höheren adelischen sukzessiven Minima verweisen wir auf [Th1] und [Ga].

Lemma 2.11. *Es gibt eine Konstante C, die nur von K abhängt, mit $H_1 \le \lambda_1 \le CH_1$.*

Beweis: Wir bezeichnen mit S_∞ die Menge der Absolutbeträge auf K, die den üblichen Betrag $|.|_\infty$ von $\mathbb{Q}$ fortsetzen. Für $\nu \in S_\infty$ bezeichnen wir den lokalen Grad $[K_\nu : \mathbb{R}]$ mit N_ν und definieren für $X \in K^N \setminus \{0^N\}$:

$$H_\infty(X) := \prod_{\nu \in S_\infty} H_\nu(X)^{N_\nu} = \prod_{\nu \in S_\infty}\left(\left(\sum_{i=1}^N |x_i|_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{N_\nu}.$$

Es ist klar, dass $H_\nu(X)$ durch die L^2-Norm des Vektors $\Phi(X) \in \mathbb{R}^{Nd}$ beschränkt wird und deshalb können wir mit (1) folgern, dass $H_\infty(X) \le \|X\|_{L^2}^d$. In der Formel (7) aus 3.2 werden wir sehen, dass $\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(X)^d \le H_\infty(X)$ für $X \in (\mathfrak{o}_K)^N$. Aus diesen beiden Ungleichungen folgt schon $H_1 \le \lambda_1$. Wir wenden jetzt den Gitterpunktsatz von Minkowski ([Ko], Satz 2.12.1) für das d-dimensionale Gitter $\Lambda(X) := (\mathfrak{o}_K)^N \cap KX$ an und bezeichnen sein erstes sukzessives Minimum mit $\lambda_1(X)$. Es folgt

$$\alpha(d)\lambda_1(X)^d \le 2^d \operatorname{vol}(\Lambda(X)_\infty) \overset{2.5}{=} 2^{r+s}\mathrm{D}_{K/\mathbb{Q}}^{1/2}\,\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(X)^d,$$

wobei r die Zahl der reellen Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ ist und $\alpha(d)$ das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet. Es gibt also eine nur von K abhängige Konstante $C > 0$ mit $\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(X) \le \lambda_1(X) \le C\,\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(X)$, wobei die erste Ungleichung aus dem Fall $H_1 \le \lambda_1$ für das Gitter $\Lambda(X)$ folgt. Es sei nun $X \in \Lambda \setminus \{0^N\}$ mit $\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(X) = H_1$. Dann gilt $\lambda_1 \le \lambda_1(X) \le CH_1$, weil $\Lambda(X)$ ein Teilgitter von Λ ist. $\square$

Definition 2.12. Sei $I^k := [0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$ der abgeschlossene k-dimensionale Einheitswürfel. Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ heißt *Lipschitz-parametrisierbar* (durch $(k-1)$-dimensionale Einheitswürfel), wenn sie in einer endlichen Vereinigung von Mengen der Form $\Phi_j(I^{k-1})$ enthalten ist, wobei $\Phi_j : I^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ die Lipschitz-Bedingung $|\Phi_j(x) - \Phi_j(y)| < c_1|x-y|$ erfüllt und c_1 eine von j, x, y unabhängige Konstante ist. Sie heißt *C^1-parametrisierbar* (durch $(k-1)$-dimensionale Einheitswürfel), wenn sie in einer endlichen Vereinigung von Mengen der Form $\Phi_j(I^{k-1})$ enthalten ist, wobei die Φ_j stetige partielle Ableitungen haben.

Aus dem Mittelwertsatz folgt direkt, dass C^1-Parametrisierungen auch Lipschitz sind. Das nun folgende Lemma aus der Geometrie der Zahlen ermöglicht uns die Anzahl der Gitterpunkte mit Hilfe von Volumina abzuschätzen. Wir geben dieses Lemma 11.10.15 aus [BG] hier mit einem ausführlichen Beweis wieder, weil es von zentraler Bedeutung für den Beweis des relativen Satzes von Schanuel ist und weil in [BG] an dieser Stelle ein Druckfehler ist.

Lemma 2.13. *Sei Ω eine beschränkte messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-parametrisierbarem Rand. Sei Λ ein Gitter in $\mathbb{R}^n$ und sei λ_1 die Länge des kürzesten Gittervektors (ungleich dem Nullvektor). Für $t > 0$ ist die Anzahl der Gitterpunkte in $t\Omega$ gegeben durch*

$$|\Lambda \cap t\Omega| = t^n \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(\Lambda)} + O\left(\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{n-1}\right) + \chi_\Omega(0^n), \tag{4}$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von n und Ω abhängen darf und χ_Ω die charakteristische Funktion von Ω ist.

Beweis: Wir benutzen das Abzählargument aus [Lang1], Chapter 6, §2, Theorem 2, um den Fehlerterm uniform bezüglich dem Gitter abzuschätzen. Nach einem Resultat aus der Geometrie der Zahlen gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von Λ so, dass der Fundamentalbereich $F_\Lambda := \{\sum_{i=1}^n m_i v_i \mid 0 \leq m_i < 1\}$ nicht zu schief ist (siehe [Le], Chapter 2, §10, Theorem 4). Das bedeutet präzise

$$\frac{\|v_1\| \cdots \|v_n\|}{\mathrm{vol}(\Lambda)} = O(1). \tag{5}$$

Wir zeigen im nächsten Absatz, dass es einen Koordinatenwechsel der Norm geben muss, der durch eine von Λ unabhängigen Konstanten C beschränkt ist und Λ in das orthogonale Gitter $\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\|v_i\| e_i$ transformiert, wobei (e_i) die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Also schneidet eine Kugel mit Durchmesser kleiner als λ_1/C_1 höchstens 2^n Translate $\lambda + F_\Lambda, \lambda \in \Lambda$, des Fundamentalbereichs.
Um die Existenz des Koordinatenwechsels zu zeigen, müssen wir beweisen, dass die euklidische Norm der Vektoren $\sum_{i=1}^n x_i v_i$ mit der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_i^2 \|v_i\|^2 = 1$ positiv nach unten beschränkt ist. Durch den Koordinatenwechsel $y_i := \|v_i\| x_i$ und durch Übergang zu den Vektoren $w_i := v_i/\|v_i\|$ können wir annehmen, dass $\|v_i\| = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Dann ist es einfach zu sehen (zum Beispiel mit Lagrange-Multiplikatoren), dass das Minimum von $\|\sum_{i=1}^n x_i v_i\|^2$ gleich dem kleinsten Eigenwert $\lambda_{\min}$ der Gram-Matrix $(\langle v_i, v_j \rangle)$ ist. Die Norm der Gram-Matrix ist nach oben durch n beschränkt und damit auch der größte Eigenwert. Weil das Produkt der Eigenwerte gleich $\mathrm{vol}(\Lambda)^2$ ist, muss $\lambda_{\min}$ nach (5) positiv nach unten beschränkt sein (unabhängig von der Lage der Einheitsvektoren $v_1, \ldots, v_n$).
Wir bezeichnen mit $N_{\mathrm{int}}(\Lambda, t)$ (bzw. $N_{\mathrm{bd}}(\Lambda, t)$) die Zahl der Gitterpunkte $\lambda \in \Lambda$, für die $\lambda + F_\Lambda$ im Innern von $t\Omega$ enthalten ist (bzw. für die $(\lambda + F_\Lambda)$ den Rand von $t\Omega$ schneidet). Es gilt

$$N_{\mathrm{int}}(\Lambda, t) \leq |\Lambda \cap t\Omega| \leq N_{\mathrm{int}}(\Lambda, t) + N_{\mathrm{bd}}(\Lambda, t).$$

Offensichtlich ist

$$N_{\mathrm{int}}(\Lambda, t)\,\mathrm{vol}(\Lambda) \leq \mathrm{vol}(t\Omega) = t^n\,\mathrm{vol}(\Omega) \leq (N_{\mathrm{int}}(\Lambda, t) + N_{\mathrm{bd}}(\Lambda, t))\,\mathrm{vol}(\Lambda),$$

also genügt es zu zeigen, dass $N_{\mathrm{bd}}(\Lambda, t)$ durch den Fehlerterm in der Behauptung abgeschätzt werden kann. Mit der Lipschitz-Konstanten L des Randes folgert man, dass es

Konstanten C_2, C_3 gibt, so dass $\partial\Omega$ durch $C_2(L/\nu)^{n-1}$ Kugeln vom Durchmesser $\nu \leq C_3 L$ überdeckt werden kann. Die Konstanten C_2, C_3 hängen nur ab von der Zahl der $(n-1)$-Einheitswürfel im Argumentenbereich der Parametrisierungen des Randes (siehe Definition 2.12). Wenn wir das für $t\Omega$ statt Ω anwenden, dann können wir $\partial(t\Omega)$ mit $C_2(Lt/\nu)^{n-1}$ Kugeln vom Durchmesser $\nu \leq C_3 Lt$ überdecken. Falls nun $\lambda_1/C_1 \leq C_3 Lt$, dann folgern wir

$$N_{\mathrm{bd}}(\Lambda, t) \leq 2^n (C_1 L)^{n-1} C_2 \left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^{n-1}, \tag{6}$$

indem wir ν von unten an λ_1/C_1 annähern. Wir dürfen die Konstante C_1 so groß wählen, dass $C_1 C_3 L \geq 1$ gilt. Dann stimmt (6) und damit auch (4) für alle $t \geq \lambda_1$. Im Bereich $t < \lambda_1$ argumentieren wir direkt in (4). Nach dem Gitterpunktsatz von Minkowski ([Ko], Satz 2.12.1) gilt $\mathrm{vol}(\Lambda) \geq c\lambda_1^n$ für $c > 0$ unabhängig von Λ. Weil $|\lambda \cap t\Omega| = \chi_\Omega(0^n)$ für $t < \lambda_1$, folgt die Behauptung. $\square$

3 Der Divisorensatz

3.1. Ein *Divisor* $\mathfrak{d}$ auf K ist ein Paar $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, T)$, wobei $\mathfrak{a}$ ein gebrochenes Ideal in K (ungleich dem Nullideal) und T eine positive reelle Zahl ist. Die Divisoren bilden mit der komponentenweisen Multiplikation eine Gruppe D und sind partiell geordnet durch $(\mathfrak{a}, T) \leq (\mathfrak{a}', T') :\Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}', T \leq T'$. Die *Norm* $\|\mathfrak{d}\|$ eines Divisors $\mathfrak{d}$ ist gleich $T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-1}$, wobei $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$ die übliche Norm eines gebrochenen Ideals ist. S_∞ bezeichnet die Menge der archimedischen Absolutbeträge auf K, das heißt die Menge der Fortsetzungen des gewöhnlichen Absolutbetrages von $\mathbb{Q}$. Für $\nu \in S_\infty$ bezeichnet N_ν den Grad der Vervollständigung K_ν über $\mathbb{R}$. Um Exponenten zu vermeiden, setzen wir $\|x\|_\nu := |x|_\nu^{N_\nu}$, wobei $x \in K_\nu$.

3.2. Jedem Punkt $X = (x_1, \ldots, x_N) \in K^N \setminus \{0^N\}$ ordnen wir durch $\mathfrak{d}_X = ([X], H_\infty X)$ einen Divisor zu, wobei $[X]$ das von den Komponenten von X erzeugte Ideal ist und

$$H_\infty X := \prod_{\nu \in S_\infty} \|X\|_{L^2_\nu} := \prod_{\nu \in S_\infty} \left(\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{N_\nu}.$$

Weiter folgt wie in [Lang2], Section 3.1:

$$\|\mathfrak{d}_X\| = \frac{H_\infty X}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}([X])} = \mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(X)^d. \tag{7}$$

Für $N = 1$ ist die Abbildung $K^* \to D$ mit $x \mapsto \mathfrak{d}_x$ ein Homomorphismus. Die Elemente des Bildes heißen *Hauptdivisoren*. Der Kern ist gleich der Einheitengruppe in K, die wir mit U bezeichnen. Die Produktformel zeigt, dass die Arakelov Höhe einer Zahl gleich 1 ist und damit folgt aus (7), dass jeder Hauptdivisor die Norm 1 hat. Für einen beliebigen Divisor $\mathfrak{d}$ hängt somit $\|\mathfrak{d}\|$ nur von der Klasse von $\mathfrak{d}$ modulo den Hauptdivisoren ab.

3.3. Sei W ein n-dimensionaler Unterrraum des K^N und L der durch W induzierte projektive lineare Unterraum in $\mathbb{P}_K^{N-1}$. Wir geben uns einen Divisor $\mathfrak{d}$ vor. Die Menge der $X \in W \setminus \{0^N\}$, die $\mathfrak{d}_X \leq \mathfrak{d}$ erfüllen, ist stabil unter komponentenweiser Multiplikation mit Einheiten. Wir bezeichnen die Menge dieser Orbits modulo U mit $L^W(\mathfrak{d})$. Weiter sei $\lambda^W(\mathfrak{d})$ die Kardinalität von $L^W(\mathfrak{d})$. Dann hängt $\lambda^W(\mathfrak{d})$ nur von der Klasse von $\mathfrak{d}$ ab, denn die Multiplikation mit $x \in K^*$ induziert eine Bijektion $L^W(\mathfrak{d}) \to L^W(\mathfrak{d}_x \mathfrak{d})$.

Theorem 3.4 (Divisorensatz). *Mit den Bezeichnungen aus Satz 0.1 gilt*

$$\lambda^W(\mathfrak{d}) = c_n \cdot \frac{\|\mathfrak{d}\|^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d} + O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-1/d}\right),$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von n und K abhängen darf.

3.5. Für den Beweis von Theorem 3.4 machen wir die folgenden Vorarbeiten: Es gibt ein Repräsentantensystem $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h$ für die Klassengruppe von K, das aus ganzen Idealen von $\mathfrak{o}_K$ besteht. Dann kann jeder Divisor durch Multiplikation mit einem Hauptdivisor auf die Form $(\mathfrak{a}_i, T)$ gebracht werden, wobei $i \in \{1, \ldots, h\}$. Da $\lambda^W(\mathfrak{d})$ und $\|\mathfrak{d}\|$ nur von der Idealklasse von $\mathfrak{d}$ und nicht vom Repräsentantensystem abhängen (siehe 3.2 und 3.3), genügt es, Theorem 3.4 für ein festes ganzes Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_i$ und den entsprechenden Divisor $(\mathfrak{a}, T)$ zu beweisen. Da wir nur endlich viele solcher Ideale betrachten und die nur von der Klassengruppe abhängen, darf dann die implizite Konstante in Theorem 3.4 auch von $\mathfrak{a}$ abhängen.

Vereinbarungen 3.6. Für den Rest dieses Abschnitts gelten die folgenden Vereinbarungen: K, N und $\mathfrak{a}$ sind fest. $(\mathfrak{a})^N$ bezeichnet die Menge der N-Tupel von Elementen aus $\mathfrak{a}$. Der Index ν läuft über S_∞ und der Index i über $\{1, \ldots, N\}$. Wir identifizieren K_ν mit $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, was nur im komplexen Fall mehrdeutig ist. Dann wählen wir eine Identifikation fest. Damit erhalten wir auch Einbettungen $\sigma_\nu : K \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Oft identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$. Es sei U die Gruppe der Einheiten von K und V die Gruppe der Einheitswurzeln von K. Es ist klar, dass V eine Untergruppe von U ist.

Definition 3.7. Seien A eine Menge, G eine auf A operierende abelsche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Eine Teilmenge S von A heißt *fundamental* mod H (in A), wenn gilt:

(i) S ist H-stabil, das heißt $\forall h \in H \; \forall s \in S \Rightarrow hs \in S$.

(ii) $GS = A$.

(iii) $g \notin H \Rightarrow gS \cap S = \emptyset$.

3.8. Durch $x \mapsto (\sigma_\nu(x))$ betten wir K in $\prod_\nu K_\nu$ ein und erhalten damit die Einbettung $\Phi : K^N \to \prod_\nu K_\nu^N \cong \mathbb{R}^{Nd}$, $X \mapsto (\sigma_\nu(X)) := ((\sigma_\nu(x_i))_{i=1,\ldots,N})$. Die Einheitengruppe U operiert auf $\prod_\nu K_\nu^N$ durch $(u, (X_\nu)_{\nu\in S_\infty}) \mapsto (\sigma_\nu(u) X_\nu)_{\nu \in S_\infty}$. Wir wollen eine fundamentale Menge mod V für die U-stabile Teilmenge $\prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right)$ auswählen. Sei ab jetzt W_ν die Vervollständigung von W in K_ν^N. Wir setzen dann $\overline{W} = \prod_\nu W_\nu$, dieses ist natürlich gleich dem Abschluss von $\Phi(W)$. Wir definieren

$$\eta : \prod_\nu \left(W_\nu \setminus \{0^N\}\right) \to \prod_\nu \mathbb{R}_\nu, \quad \eta = (\eta_\nu)_{\nu \in S_\infty},$$

wobei $\eta_\nu : W_\nu \setminus \{0^N\} \to \mathbb{R}_\nu = \mathbb{R}$ mit $\eta_\nu(X) = \log(\|X\|_{L^2_\nu})$. Sei weiter $\mathrm{pr} : \prod_\nu \mathbb{R}_\nu \to H$ die Projektion entlang des Vektors $(N_\nu)_{\nu \in S_\infty}$, das heißt

$$(\mathrm{pr}(Y))_\nu = y_\nu - \left(\frac{1}{d} \sum_{\omega \in S_\infty} y_\omega\right) N_\nu.$$

Nach dem Dirichletschen Einheitensatz wird U durch die Abbildung $u \mapsto (\log \|u\|_\nu)_{\nu \in S_\infty}$ auf ein vollständiges Gitter der Hyperebene $H = \{\sum_\nu y_\nu = 0\}$ von $\mathbb{R}^{r+s}$ abgebildet. Der Kern ist dabei die Gruppe der Einheitswurzeln V (siehe [Ko], Kapitel 2). Wir wählen eine Basis $\overline{U_1}, \ldots, \overline{U_{r+s-1}}$ des Bildes von U. Dazu gehört die Fundamentalmasche $F := [0,1)\overline{U_1} + \ldots + [0,1)\overline{U_{r+s-1}}$ des Gitters in H. Mit demselben Argument wie in [Scha], S. 437, ist $\Delta := (\mathrm{pr} \circ \eta)^{-1}(F)$ fundamental mod V in $\prod_\nu \big(W_\nu \setminus \{0^N\}\big)$. Sei

$$R(T) := \left\{ (Z_\nu) \in \overline{W} \,\middle|\, \prod_\nu \|Z_\nu\|_{L^2_\nu} \leq T \right\} \text{ und } \Delta(T) := \Delta \cap R(T).$$

Offensichtlich ist $R(T)$ wegen der Produktformel U-stabil. Unser Ziel ist es nun, die U-Orbits in $((\mathfrak{a})^N \setminus \{0^N\}) \cap R(T)$ zu zählen.

Proposition 3.9. *$\omega\lambda^W(\mathfrak{a}, T)$ ist die Anzahl der Punkte des Gitters $(\mathfrak{a})^N$ in $\Delta(T)$.*

Beweis: Dies folgt analog zu [Scha], Proposition 1. □

Lemma 3.10. *(a) $t\Delta = \Delta$ für $t \in \mathbb{R}^*$.*

(b) $R(T) = T^{1/d} R(1)$ für $T > 0$.

(c) $\Delta(T) = T^{1/d} \Delta(1)$ für $T > 0$.

Beweis: Falls $W = K^N$, dann folgt dies direkt aus [Scha], Lemma 3. Es ist aber klar, dass im allgemeinen Fall der Durchschnitt mit $\overline{W}$ nichts an den Aussagen ändert. □

Proposition 3.11. *Die Menge $\Delta(1)$ ist beschränkt mit C^1-parametrisierbarem Rand.*

Beweis: Im absoluten Fall $W = K^N$ ist dies Proposition 2 von [Scha]. Der Beweis ist mühsam, aber nicht sehr schwierig und beruht auf dem Satz über implizite Funktionen (siehe [Scha], Lemmata 4-10). In unserer relativen Situation eines n-dimensionalen Unterraumes W in K^N bemerkt man zuerst, dass $\Delta(1)$ nur von den L^2_ν-Normen der Vektoren abhängt. Somit können wir die relative Situation durch Wahl von orthonormierten Basen in den W_ν auf die absolute Situation zurückführen. Als einziger Unterschied zu [Scha] ist zu bemerken, dass wir die L^2_ν-Norm statt die Maximumsnorm an den archimedischen Stellen ν benutzen. Dies vereinfacht aber das Argument in Schanuel's Lemmata 8 und 9, da das Quadrat der L^2_ν-Norm schon glatt ist. □

Mit Hilfe der Proposition 3.11 werden jetzt alle Voraussetzungen für Lemma 2.13 erfüllt, das wir nun anwenden wollen, um Theorem 3.4 zu zeigen. Dazu fehlt uns noch die folgende Proposition:

Proposition 3.12. *Für das relative Lebesguemaß μ in $\overline{W}$ gilt:*

$$\mu(\Delta(1)) = Rn^{r+s-1}\alpha(n)^r \alpha(2n)^s.$$

Beweis: Wie wir schon im Beweis von Proposition 3.11 erwähnt hatten, hängt die Menge $\Delta(1)$ nur von den L^2_ν-Normen der Vektoren ab und wir können $\overline{W}$ durch Wahl von orthonormierten Basen mit $\mathbb{R}^{nd}$ identifizieren.
1. Schritt: Polarkoordinaten für die Vervollständigungen von K einführen.
Für $N_\nu = 2$, das heißt $K_\nu = \mathbb{C}$, seien $\rho_{i\nu}, \theta_{i\nu}$ die Polarkoordinaten in K_ν. Also $\rho_{i\nu} =$

$|z_{i\nu}| = \sqrt{\mathrm{Re}(z_{i\nu})^2 + \mathrm{Im}(z_{i\nu})^2}$ und $\theta_{i\nu} = \arg(z_{i\nu})$. Für $N_\nu = 1$, das heißt $K_\nu = \mathbb{R}$, setzen wir $\rho_{i\nu} = |z_{i\nu}|$. Damit gilt nun:

$$\mu(\Delta(1)) = \int_{\Delta(1)} \prod_{i,\nu} dz_{i\nu} = (2^n)^r \int\int\int \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ komplex}}} \rho_{i\nu} \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ komplex}}} d\theta_{i\nu} \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ rell}}} d\rho_{i\nu} \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ komplex}}} d\rho_{i\nu}.$$

Hierbei laufen das erste und zweite Integral über alle $\rho_{i\nu} \geq 0$ mit $\prod_\nu \|\rho_{i\nu}\|_{L^2_\nu} \leq 1$ und $\mathrm{pr}(\log(\|\rho_{i\nu}\|_{L^2_\nu})) \in F$. Für das dritte Integral gilt $0 \leq \theta_{i\nu} \leq 2\pi$. Der Faktor $(2^n)^r$ entsteht, da wir im Fall $N_\nu = 1$ durch $\rho_{i\nu} = |z_{i\nu}|$ eine Symmetrie haben. Nun läßt sich die Integration über $\theta_{1\nu}, \ldots, \theta_{n\nu}$ ausführen und wir erhalten:

$$2^{nr}(2\pi)^{ns} \int\int \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ komplex}}} \rho_{i\nu} \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ komplex}}} d\rho_{i\nu} \prod_{\substack{i \\ \nu \text{ rell}}} d\rho_{i\nu} = 2^{nr}(2\pi)^{ns} \int \prod_{i,\nu} \rho_{i\nu}^{N_\nu - 1} d\rho_{i\nu}.$$

<u>2. Schritt:</u> Wechsel in hypersphärische Koordinaten für alle Stellen ν.
Wir setzen $\rho_{1\nu} = r_\nu \cos(\phi_{1\nu})$, $\rho_{n\nu} = r_\nu \sin(\phi_{1\nu}) \cdots \sin(\phi_{(n-2)\nu}) \sin(\phi_{(n-1)\nu})$ und $\rho_{i\nu} = r_\nu \sin(\phi_{1\nu}) \cdots \sin(\phi_{(i-2)\nu}) \cos(\phi_{(i-1)\nu})$ für $i = 2, \ldots, n-1$. Für das Volumenelement gilt dann $d\rho_{1\nu} \cdots d\rho_{n\nu} = r_\nu^{n-1} \sin^{n-2}(\phi_{1\nu}) \sin^{n-3}(\phi_{2\nu}) \cdots \sin(\phi_{(n-2)\nu}) dr_\nu d\phi_{1\nu} \cdots d\phi_{(n-1)\nu}$. Das wenden wir jetzt auf unser Ergebnis aus dem 1. Schritt an und erhalten:

$$\begin{aligned}
&2^{nr}(2\pi)^{ns} \int \prod_{i,\nu} \rho_{i\nu}^{N_\nu - 1} d\rho_{i\nu} \\
=&2^{nr}(2\pi)^{ns} \int \prod_{\nu} r_\nu^{(n-1)+n(N_\nu-1)} \sin^{(n-2)+(n-1)(N_\nu-1)}(\phi_{1\nu}) \cos^{N_\nu-1}(\phi_{1\nu}) \cdot \\
&\cdot \sin^{(n-3)+(n-2)(N_\nu-1)}(\phi_{2\nu}) \cos^{N_\nu-1}(\phi_{2\nu}) \sin^{(n-4)+(n-3)(N_\nu-1)}(\phi_{3\nu}) \cos^{N_\nu-1}(\phi_{3\nu}) \cdot \\
&\cdots \sin^{(n-n)+(n-(n-1))(N_\nu-1)}(\phi_{(n-1)\nu}) \cos^{N_\nu-1}(\phi_{(n-1)\nu}) dr_\nu d\phi_{1\nu} \cdots d\phi_{(n-1)\nu}
\end{aligned}$$

mit den Integrationsbedingungen $\prod_\nu r_\nu^{N_\nu} \leq 1$, $\mathrm{pr}((\log(r_\nu^{N_\nu}))_{\nu \in S_\infty}) \in F$ und $0 \leq \phi_{i\nu} \leq \frac{\pi}{2}$.
<u>3. Schritt:</u> Integration über $\phi_{1\nu}, \ldots, \phi_{(n-1)\nu}$ für ν reell.

$$\prod_{i=0}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^i(\phi_{(n-1-i)\nu}) d\phi_{(n-1-i)\nu} = \prod_{i=0}^{n-2} \frac{\Gamma(\frac{i}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{i}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

<u>4. Schritt:</u> Integration über $\phi_{1\nu}, \ldots, \phi_{(n-1)\nu}$ für ν komplex.

$$\prod_{i=0}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{i+(i+1)}(\phi_{(n-1-i)\nu}) \cos(\phi_{(n-1-i)\nu}) d\phi_{(n-1-i)\nu} = \prod_{i=0}^{n-2} \frac{\Gamma(i+1)}{2\Gamma(i+2)} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{\Gamma(n)}.$$

<u>5. Schritt:</u> Zusammensetzen der Zwischenergebnisse.
Mit dem 3. und 4. Schritt und $\alpha(n) = \pi^{\frac{n}{2}} / \Gamma(\frac{n}{2}+1)$ wird das Integral aus dem 2. Schritt zu

$$n^{r+s} \alpha(n)^r \alpha(2n)^s 2^s \int \prod_\nu r_\nu^{nN_\nu - 1} dr_\nu$$

vereinfacht, wobei das Integral über $\prod_\nu r_\nu^{N_\nu} \leq 1$ und $\mathrm{pr}((\log(r_\nu^{N_\nu}))_{\nu \in S_\infty}) \in F$ läuft.
<u>6. Schritt:</u> Integration über r_ν.
Wir setzen dazu $t_\nu = r_\nu^{N_\nu}$. Damit ist dann das Integral

$$\int \prod_\nu r_\nu^{nN_\nu - 1} dr_\nu = \int \prod_\nu \frac{1}{N_\nu} \frac{r_\nu^{nN_\nu - 1}}{r_\nu^{N_\nu - 1}} dt_\nu = \int \prod_\nu \frac{1}{N_\nu} r_\nu^{N_\nu(n-1)} dt_\nu = \frac{1}{2^s} \int \prod_\nu t_\nu^{n-1} dt_\nu$$

zu bestimmen, wobei die Integrationen über $\prod_\nu t_\nu \leq 1$ und $\mathrm{pr}((\log(t_\nu))_{\nu\in S_\infty}) \in F$ laufen. Setzen wir weiter $u = \prod_\nu t_\nu$ und ξ_j als die j-te Koordinate von $\mathrm{pr}((\log(t_\nu)_{\nu\in S_\infty}))$ bezüglich der Basis $\overline{U_1}, \ldots, \overline{U_{r+s-1}}$ von H. Dabei ist die Determinante der Jakobimatrix $\pm R$ (siehe [Scha] S. 444), und wir erhalten:

$$\frac{1}{2^s}\int \prod_\nu t_\nu^{n-1} dt_\nu = \frac{R}{2^s}\int u^{n-1} du \prod_j d\xi_j = \frac{R}{2^s}\frac{1}{n},$$

wobei die Integration über $0 \leq u \leq 1$ und $0 \leq \xi_j < 1$ geht.
7. Schritt: Beweis der Behauptung.
Schließlich setzen wir die Lösung für die Integration über r_ν (6. Schritt) in das Ergebnis aus dem 5. Schritt ein und erhalten:

$$n^{r+s}\alpha(n)^r\alpha(2n)^s 2^s \int \prod_\nu r_\nu^{nN_\nu - 1} dr_\nu = Rn^{r+s-1}\alpha(n)^r\alpha(2n)^s. \qquad \square$$

Beweis von Theorem 3.4: Setze $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, T)$. Dann gilt:

$$\omega\lambda^W(\mathfrak{a}, T) \overset{3.9}{=} |(\mathfrak{a})^N \cap \Delta(T)| \overset{3.10(c)}{=} |(\mathfrak{a})^N \cap T^{1/d}\Delta(1)| \overset{\text{Def. }\Delta(1)}{=} \left|\left((\mathfrak{a})^N \cap W\right) \cap T^{1/d}\Delta(1)\right|.$$

Wir wenden nun Lemma 2.13 mit $\Lambda = (\mathfrak{a})^N \cap W$ und $t\Omega = T^{1/d}\Delta(1)$ an. Wir bemerken zusätzlich, dass das erste sukzessive Minimum des Gitters $(\mathfrak{a})^N \cap W$ größer oder gleich dem ersten sukzessiven Minimum λ_1 von $(\mathfrak{o}_K)^N \cap W$ ist. Weiter ist die implizite Konstante im Fehlerterm zwar *a priori* abhängig von Ω und damit von W, aber da alle Ω isometrisch sind, folgt die Unabhängigkeit von W. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
\omega\lambda^W(\mathfrak{a}, T) &= T^n \frac{\mu(\Delta(1))}{\mathrm{vol}((\mathfrak{a})^N \cap W)} + O\left(\left(\frac{T^{1/d}}{\lambda_1}\right)^{dn-1}\right) \\
&\overset{2.9,3.12}{=} \underbrace{R\,\mathrm{D}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}^{-n/2}\, n^{r+s-1}\alpha(n)^r \left\{2^n\alpha(2n)\right\}^s}_{\omega c_n} \frac{\|\mathfrak{d}\|^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d} + O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-1/d}\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

4 Relativer Satz von Schanuel

4.1. Wir betrachten eine Zahl $H_1 \geq 1$. Sei I die multiplikative Halbgruppe der ganzen Ideale von K ohne das Nullideal. Wir setzen $\mathbb{R}(I) := \{\chi : I \to \mathbb{R} \mid \chi \text{ Abbildung}\}$. Dann ist $\mathbb{R}(I)$ ein kommutativer Ring mit 1, wobei die Addition punktweise und die Multiplikation durch die Faltung

$$(\chi_1\chi_2)(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}} \chi_1(\mathfrak{a}_1)\chi_2(\mathfrak{a}_2)$$

definiert sind (vgl. [Scha], S. 444). Wir erinnern daran (siehe 3.1), dass die Divisoren auf K mit der komponentenweisen Multiplikation die Gruppe D bilden. Sei nun weiter $\mathbb{R}(D) := \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ Abbildung und } f(\mathfrak{d}) = 0 \text{ falls } \|\mathfrak{d}\| < H_1^d\}$. Dann ist $\mathbb{R}(D)$ mit

$$\chi f(\mathfrak{a}, T) = \sum_{\mathfrak{b}} \chi(\mathfrak{b}) f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T)$$

ein $\mathbb{R}(I)$-Modul, wobei die Summe über alle ganzen Ideale $\mathfrak{b}$ läuft (vgl. [Scha], S. 445). Beachte, dass in beiden Faltungen die Summen endlich sind, da die Menge der ganzen

Ideale mit Norm kleiner gleich einer Konstanten endlich ist (siehe [Land], Satz 108). Für die Möbiussche μ-Funktion aus 1.2 gilt $\mu \in \mathbb{R}(I)$. Sei χ_0 die konstante Funktion $\chi_0(\mathfrak{a}) = 1$ für alle $\mathfrak{a}$. Dann liefert uns die Möbiussche Umkehrformel, dass μ und χ_0 invers sind.

Lemma 4.2. *Es sei $F(m) := |\{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}_K \mid \mathfrak{a}$ Ideal, $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) = m\}|$ und $s > 1$. Dann gilt:*

$$\sum_{m=\lfloor x \rfloor+1}^{\infty} \frac{F(m)}{m^s} = O\left(x^{1-s}\right) \text{ und } \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{F(m)}{m} = O\left(1 + \log^+(x)\right).$$

Beweis: Die erste Behauptung ist in [Land], Satz 203 zu finden. Um die zweite Behauptung zu zeigen, ist eine Anpassung von Fall 1 des Beweises von Satz 203 auf $\vartheta = 1$ nötig. Dazu wird in der letzten Summe des Beweises der erste Summand abgespalten und die Rechnung analog fortgeführt. □

Lemma 4.3. *Gegeben seien reelle Zahlen $H_1 \geq 1$, $\lambda_1 > 0$, $\alpha \geq 0$, $s > 1$ und $t \geq 1$.*

(a) Falls $f \in \mathbb{R}(D)$ von der Form $f(\mathfrak{d}) = \alpha\|\mathfrak{d}\|^s$ für $\|\mathfrak{d}\| \geq H_1^d$ ist, dann gilt

$$\mu f(\mathfrak{d}) = \frac{\alpha}{\zeta_K(s)}\|\mathfrak{d}\|^s + \alpha O\left(\|\mathfrak{d}\| H_1^{d(s-1)}\right).$$

(b) Falls $g \in \mathbb{R}(D)$ von der Form $g(\mathfrak{d}) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right)$ für $\|\mathfrak{d}\| \geq H_1^d$ ist, dann gilt

$$\mu g(\mathfrak{d}) = \begin{cases} O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\left(1 + \log^+\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}\right)\right)\right) & \text{für } t = 1 \\ O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right) & \text{für } t > 1 \end{cases}$$

In beiden Aussagen ist die implizite Konstante unabhängig von H_1, λ_1, α und $\mathfrak{d}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, T)$. Als erstes wollen wir die Aussage über die Funktion f beweisen. Nun ist $\mathbb{R}(D)$ ein $\mathbb{R}(I)$-Modul (siehe 4.1) und nach Definition von $\mathbb{R}(D)$ gilt $f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T) = 0$ für $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) > T/H_1^d$. Somit folgt:

$$\mu f(\mathfrak{d}) = \sum_{\mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{b}) f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T) = \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) \leq \frac{T}{H_1^d}} \mu(\mathfrak{b}) f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T).$$

Nach dem Einsetzen der Definitionen von f und $\|.\|$ nutzen wir die Multiplikativität der Norm und die Äquivalenz $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) \leq T/H_1^d \Leftrightarrow \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) \leq \|\mathfrak{d}\|/H_1^d$ und erhalten

$$\sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) \leq \frac{T}{H_1^d}} \mu(\mathfrak{b}) f(\mathfrak{b}\mathfrak{a}, T) = \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) \leq \frac{T}{H_1^d}} \mu(\mathfrak{b}) \alpha T^s \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a})^{-s}$$

$$= \alpha\|\mathfrak{d}\|^s \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) \leq \frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}} \mu(\mathfrak{b}) \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-s} \overset{1.3}{=} \alpha\|\mathfrak{d}\|^s \zeta_K(s)^{-1} - \alpha\|\mathfrak{d}\|^s \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) > \frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^s}.$$

Jetzt gilt aber:

$$\sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})>\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^s} = O\left(\sum_{m=\left\lfloor\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}\right\rfloor+1}^{\infty} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\\ \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})=m}} \frac{1}{m^s}\right) \overset{4.2}{=} O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}\right)^{1-s}\right)$$

und damit (a). Für (b) gilt analog:

$$\mu g(\mathfrak{d}) = \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})\leq\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}} \mu(\mathfrak{b}) O\left(\left(\frac{\|(\mathfrak{ab},T)\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})\leq\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}} \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-t}\right).$$

Nun betrachten wir zuerst den Fall $t > 1$. Hier ist die Summe durch $\zeta_K(t)$ nach oben beschränkt, also:

$$O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t \sum_{\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})\leq\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}} \mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^{-t}\right) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t \zeta_K(t)\right) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^t\right)$$

wie gewünscht. Im Fall $t = 1$ ergibt sich die Behauptung mit 4.2. □

4.4. Sei $\|\mathfrak{d}\| = (\mathfrak{a}, T)$ ein Divisor. Wir werden Lemma 4.3 in der Situation von Abschnitt 3 anwenden. Insbesondere verwenden wir die Menge der U-Orbits $L^W(\mathfrak{d})$ und ihre Kardinalität $\lambda^W(\mathfrak{d})$ (siehe 3.3). Wir wählen ab jetzt λ_1 als das erste sukzessive Minimum und H_1 als das erste adelische sukzessive Minimum des K-Gitters $(\mathfrak{o}_K)^N \cap W$ in W (siehe 2.10). Mit $\mathrm{Cl}(\mathfrak{a})$ bezeichnen wir die Klasse von $\mathfrak{a}$ modulo den Hauptidealen. Es sei $[X]$ das von den Komponenten von X erzeugte Ideal und wir werden weiter unten auch die Funktion $H_\infty X$ aus 3.2 benutzen. Für einen Divisor $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, T)$ sei $\tilde{L}^W(\mathfrak{d}) = \tilde{L}^W(\mathfrak{a}, T)$ die Menge der Punkte $K^*X \in L = \mathbb{P}_K(W)$ mit $\mathrm{Cl}([X]) = \mathrm{Cl}(\mathfrak{a})$ und $\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(X)^d \leq \|\mathfrak{d}\| = T\,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-1}$. Mit $\tilde{\lambda}^W(\mathfrak{d})$ bezeichnen wir die Kardinalität von $\tilde{L}^W(\mathfrak{d})$. Bea! chte, dass für $\|\mathfrak{d}\| < H_1^d$ sowohl $\tilde{\lambda}^W(\mathfrak{d})$ als auch $\lambda^W(\mathfrak{d})$ Null sind. Letzteres folgt aus (7). Somit gilt $\lambda^W, \tilde{\lambda}^W \in \mathbb{R}(D)$.

Theorem 4.5. *Unter obigen Voraussetzungen gilt mit der Konstanten c_n aus Satz 0.1:*

$$\tilde{\lambda}^W(\mathfrak{d}) = \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \cdot \frac{\|\mathfrak{d}\|^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d} + \begin{cases} O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1}\left(1 + \log^+\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1}\right)\right)\right) & \text{falls } d = 1, n = 2 \\ O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-\frac{1}{d}}\right) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei die implizite Konstante in der Abschätzung von n und K abhängen darf.

Beweis: Sei $\overline{L}^W(\mathfrak{a}, T) = \{UX \in (W \setminus \{0^N\})/U \mid [X] = \mathfrak{a} \text{ und } H_\infty X \leq T\}$. Dann gilt:

$$L^W(\mathfrak{a}, T) = \dot{\bigcup_{\mathfrak{b}}} \overline{L}^W(\mathfrak{ab}, T),$$

wobei die disjunkte Vereinigung über alle ganzen Ideale $\mathfrak{b}$ läuft. Aus $\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(X) \geq 1$ und (7) schließt man leicht, dass die Menge $\overline{L}^W(\mathfrak{ab}, T)$ für $\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) > T/\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$ leer ist. Somit folgt, da die Menge der ganzen Ideale mit Norm kleiner gleich einer Konstanten endlich ist, dass die Vereinigung endlich ist. Die Abbildung $\overline{L}^W(\mathfrak{c},T) \to \tilde{L}^W(\mathfrak{c},T)$ mit $UX \mapsto K^*X$ ist eine Bijektion, daher gilt:

$$\lambda^W(\mathfrak{a},T) = \sum_{\mathfrak{b}} \tilde{\lambda}^W(\mathfrak{a}\mathfrak{b},T).$$

Weiter folgt $\lambda^W = \chi_0 \tilde{\lambda}^W$. Da μ invers zu χ_0 in $R(D)$ ist, erhalten wir $\mu\lambda^W = \mu\chi_0\tilde{\lambda}^W = \tilde{\lambda}^W$. Nach Theorem 3.4 gilt $\lambda^W = f + g$, wobei

$$f(\mathfrak{d}) = c_n \frac{\|\mathfrak{d}\|^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d} \text{ und } g(\mathfrak{d}) = O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-\frac{1}{d}}\right).$$

Wir nutzen diese Definition von f und g nur im Fall $\|\mathfrak{d}\| \geq H_1^d$ und wir setzen $f(\mathfrak{d}) = g(\mathfrak{d}) = 0$ für $\|\mathfrak{d}\| < H_1^d$, das heißt $f, g \in \mathbb{R}(D)$. Wir benutzen wieder das K-Gitter $\Lambda := (\mathfrak{o}_K)^N \cap W$ in W mit Bild Λ_∞ in $\mathbb{R}^{Nd}$. Mit Lemma 4.3 und 2.5 folgt

$$\mu f(\mathfrak{d}) = \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \cdot \frac{\|\mathfrak{d}\|^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d} + \frac{1}{\mathrm{vol}(\Lambda_\infty)} O\left(\|\mathfrak{d}\| H_1^{d(n-1)}\right).$$

Es gilt nach Definition der sukzessiven Minima und dem Gitterpunktsatz von Minkowski ([Ko], Satz 2.12.1), dass $\lambda_1^{nd} \leq C \,\mathrm{vol}(\Lambda_\infty)$ für eine von Λ_∞ unabhängige Konstante C. Also folgt zusammen mit $H_1 \leq \lambda_1$ (siehe 2.11):

$$\mu f(\mathfrak{d}) \overset{2.11}{=} \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \cdot \frac{\|\mathfrak{d}\|^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d} + \frac{1}{H_1^{nd}} O\left(\|\mathfrak{d}\| H_1^{d(n-1)}\right) = \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \cdot \frac{\|\mathfrak{d}\|^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d} + O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}\right).$$

Analog schätzen wir μg mit Lemma 4.3 ab. Aus $\mu\lambda^W = \mu f + \mu g$ folgt, dass $\mu\lambda^W(\mathfrak{d})$ gleich

$$\frac{c_n}{\zeta_K(n)} \cdot \frac{\|\mathfrak{d}\|^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d} + O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}\right) + \begin{cases} O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1}\left(1 + \log^+\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1}\right)\right)\right) & \text{für } d = 1, n = 2 \\ O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{H_1^d}\right)^{n-\frac{1}{d}}\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Für $\|\mathfrak{d}\| \geq H_1^d$ gilt $\|\mathfrak{d}\|/H_1^d \leq (\|\mathfrak{d}\|/H_1^d)^{n-1/d}$. Die Behauptung folgt aufgrund von $\mu\lambda = \tilde{\lambda}^W$ und der Äquivalenz von λ_1 und H_1 (siehe 2.11). Für $\|\mathfrak{d}\| < H_1^d$ gilt $\tilde{\lambda}^W(\mathfrak{d}) = 0$ und die Behauptung folgt aus

$$\frac{c_n}{\zeta_K(n)} \cdot \frac{\|\mathfrak{d}\|^n}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d} \leq \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \cdot O\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|^n}{\lambda_1^{nd}}\right) \leq O\left(\left(\frac{\|\mathfrak{d}\|}{\lambda_1^d}\right)^{n-\frac{1}{d}}\right).$$

Für die erste Ungleichung benutzen wir $\lambda_1^{nd} = O(\mathrm{vol}(\Lambda_\infty)) = O(\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d)$ wie oben. □

Beweis von Satz 0.1: Sei $\mathfrak{a}_i$ ein Vertretersystem der Idealklassen. $\tilde{\lambda}^W(\mathfrak{a}_i, T^d \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_i))$ ist dann die Anzahl der Punkte zu der Idealklasse $\mathrm{Cl}(\mathfrak{a}_i)$ mit Höhe kleiner gleich T. Die Norm des Divisors $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}_i, T^d \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_i))$ ist $\|\mathfrak{d}\| = T^d \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_i) \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_i)^{-1} = T^d$. Für $(d,n) \neq (1,2)$ folgt aus Theorem 4.5:

$$N(L,T) = \sum_i \tilde{\lambda}^W(\mathfrak{a}_i, T^d \,\mathrm{N}_{\mathrm{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_i)) = \sum_i \frac{c_n}{\zeta_K(n)} \cdot \frac{T^{nd}}{\mathrm{H}_{\mathrm{Ar}}(L)^d} + O\left(\left(\frac{T^d}{\lambda_1^d}\right)^{n-1/d}\right)$$

und damit die Behauptung. Für $n = 2$ und $d = 1$ führt man die analoge Rechnung mit dem entsprechenden Fehlerterm aus Theorem 4.5 durch. □

Literatur

[BG] Bombieri, E.; Gubler, W.: *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs 4; Cambridge University Press, Cambridge 2006, xvi+652 S.

[Ga] Gaudron, É.: *Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global*; arXiv:math/0605408, 1–47.

[Ko] Koch, H.: *Zahlentheorie, Algebraische Zahlen und Funktionen*; Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1997, xii+344 S.

[Land] Landau, E.: *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale*, 2. Auflage; B. G. Teubner, Leibzig 1927, vii+147 S.

[Lang1] Lang, S.: *Algebraic number theory*, Addison-wesley Series in Mathematics; Addison-Wesley Publishing Company Inc, Reading (Mass.) 1970, xi+354 S.

[Lang2] Lang, S.: *Fundamentals of Diophantine geometry*; Springer, New York 1983, xviii+370 S.

[Lang3] Lang, S.: *Number theory III, Diophantine geometry*; Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 60. Springer, Berlin 1991, xiv+296 S.

[Le] Lekkerkerker, C.G.: *Geometry of Numbers*; Bibliotheca Mathematica Vol. VIII; Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London (1969), ix+510 S.

[Nar] Narkiewicz, W.: *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, 2nd ed., substantially revised and extended; Springer, Berlin etc. 1990; PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1990, xiii+746 S.

[Pe] Peyre, E.: *Points de haunteur bornée, topologie adélique er mesures de Tamagawa*, 22nd Journées Arithmétiques (Lille 2001), J. Théor. Nombres Bordeaux 15, No. 1 (2003), 319–349.

[Scha] Schanuel, S.: *Heights in number fields*; Bull. Soc. Math. France 107 (1979), no. 4, 433–449.

[Schm] Schmidt, W.M.: *On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations*; Ann. Math. (2) 85 (1967) 430-472.

[Th1] Thunder, J.L.: *An adelic Minkowski-Hlawka Theorem and an application to Siegel's Lemma*; J. reine angew. Math. 475 (1996), 167–185.

[Th2] Thunder, J.L.: *An asymptotic estimate for heights of algebraic subspaces*; Trans. Amer. Math. Soc. 331 (1992), no. 1, 395–424.

[Th3] Thunder, J.L.: *Asymptotic estimates for rational points of bounded height on flag varieties*; Compositio Math. 88 (1993), no. 2, 155–186.

Christian Christensen
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
e-mail: christec@mathematik.hu-berlin.de

Walter Gubler
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
e-mail: gubler@mathematik.hu-berlin.de