Math. Ann. 298, 427–455 (1994)

Mathematische Annalen

Höhentheorie

(mit einem Appendix von Jürg Kramer: Eine alternative Begründung der Néron-Tate Höhe)

Walter Gubler

Forschungsinstitut für Mathematik, ETH-Zentrum, CH-8092 Zürich, Schweiz

Eingegangen am 7. Oktober 1992

Mathematics Subject Classification (1991): 11G99, 14G40, 14K15

0 Einleitung

Als wesentliches Hilfsmittel in der Diophantischen Geometrie hat sich die Höhe eines rationalen Punktes erwiesen. Sie mißt in gewissem Sinn die arithmetische Komplexität dieses Punktes und wird gebraucht um die Verteilung der rationalen Punkte in einer Varietät über einem Zahlkörper zu kontrollieren. Als Illustration sollen folgende Beispiele erwähnt werden: Northcott [No] hat 1949 gezeigt, daß die Menge der Punkte von $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ mit beschränkter Höhe und mit Koordinaten in einem Zahlkörper von beschränktem Grad endlich ist. In den verschiedenen Beweisen des Satzes von Faltings über die Mordell-Vermutung geht jeweils entscheidend die Theorie der Höhen ein. Für eine Übersicht dieser aktuellen Arbeiten wird der Leser auf den neuen Appendix der dritten Auflage von [FW] verwiesen.

Wiederholen wir doch zuerst die Definition der Höhe h eines Punktes $P \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ mit den homogenen Koordinaten $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ aus dem Zahlkörper K. Sei M_K die Menge derjenigen Absolutbeträge v von K, welche im archimedischen Fall den euklidischen Betrag von $\mathbb{Q}$ fortsetzen und im Fall einer Primzahl $p \in \mathbb{N}$ mit $v \mid p$ bestimmt sind durch $|p|_v = \dfrac{1}{p}$. Dann definiert man

$$h(P) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log \max_{i=0,\ldots,n} |\alpha_i|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]},$$

wobei K_v und $\mathbb{Q}_v$ die Vervollständigungen von K und $\mathbb{Q}$ bezüglich v sind. Die Höhe ist wohldefiniert wegen der Produktformel, unabhängig von K und nicht negativ. Für eine projektive Varietät X über $\overline{\mathbb{Q}}$ und einen Morphismus $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert man $h_\varphi : X(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto h(\varphi(x))$.

Die grundlegenden Untersuchungen dieser Höhen hat Weil durchgeführt [We] und festgestellt, daß h_φ bis auf eine beschränkte Funktion nur von der Isomorphieklasse des Geradenbündels $\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ abhängt. Definiert man jetzt $h_{\mathcal{L}}$ als Äquivalenzklasse von h_φ in $\mathbb{R}^{X(\bar{\mathbb{Q}})}/\{\text{beschränkte Funktionen}\}$, dann präsentieren sich seine Resultate folgendermaßen (s. [La]): Die Zuordnung $\mathscr{L} \to h_{\mathscr{L}}$ induziert kanonisch einen Homomorphismus

$$h : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{R}^{X(\bar{\mathbb{Q}})}/\{\text{beschränkte Funktionen}\}$$

und h ist funktoriell. Später hat Néron festgestellt [Né], daß es auf einer abelschen Varietät A über $\bar{\mathbb{Q}}$ in jeder Äquivalenzklasse genau eine quadratische Funktion gibt. Dies führt zu einem Homomorphismus

$$\widehat{h} : \mathrm{Pic}(A) \to \{\text{quadratische Funktionen auf } A(\bar{\mathbb{Q}})\}\,.$$

$\widehat{h}_{\mathscr{L}}$ nennt man die Néron-Tate Höhe zum Geradenbündel $\mathscr{L}$. Nesterenko und Philippon [Ph1] haben den Höhenbegriff ausgedehnt auf Untervarietäten V von $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$, indem sie die Höhe einer solchen definiert haben als die Höhe des zugeordneten Chowpunktes. Damit läßt sich zum Beispiel der Satz von Northcott sofort für Untervarietäten verallgemeinern. In [Ph2] wurde festgestellt, daß für einen Isomorphismus φ von $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ die Ungleichung

$$|h(V) - h(\varphi(V))| \le C \cdot d(V)$$

gilt, wobei d den Grad bezeichnet und $C = n\,h(\varphi) + (n+6)\log(n+1)$ ist. Nach Wahl eines symmetrischen sehr amplen Divisors auf einer abelschen Varietät definierte Philippon mit dem üblichen Limesprozeß eine Néron-Tate Höhe für Untervarietäten, welche diejenige für Punkte verallgemeinert. Faltings führte in seiner Arbeit [Fa] über diophantische Approximation auf abelschen Varietäten eine andere Höhe mit Hilfe der Arakelov-Geometrie ein. Soulé [So1] hat gezeigt, daß die Differenz der Faltingshöhe zur Philipponhöhe gleich

$$\frac{1}{2}(\dim V + 1)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}d(V)$$

ist. Das Ziel im folgenden Artikel ist es, die oben erwähnten Resultate von Weil auf die Höhen für Zyklen auszudehnen. Dazu werden im Abschnitt 1 und 2 bekannte Resultate der arithmetischen Schnitttheorie und über multiprojektive Räume zusammengefaßt und die Notation fixiert. Als letztes Hilfsmittel werden im dritten Abschnitt für ein algebraisches Schema X Eigenschaften über den Multigrad bereitgestellt.

Im vierten Abschnitt wird die Höhe analog zur Arbeit von Faltings [Fa] eingeführt. Dabei wird das klassische Modell $\mathbb{P}^n$ ersetzt durch einer Arakelov-Varietät $\overline{P}$, deren harmonische Formen einen Ring bilden. Die Höhe bezüglich den zulässig metrisierten Geradenbündeln $\overline{\mathscr{L}}_0, \ldots, \overline{\mathscr{L}}_t$ von P ist dann eine Funktion $h_{\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t}$ von den Zyklen der relativen Dimension t in die reellen Zahlen. Das Kernstück des vierten Abschnitts ist das Induktionslemma, das die Höhe eines Primzyklus Z mit der Höhe des Divisors eines regulären meromorphen Schnitts der Einschränkung von $\mathscr{L}_t$ auf Z vergleicht. Die Ringbedingung für die harmonischen Formen wird nur für dieses Lemma gebraucht. Falls $\overline{P}$ ein multiprojektiver Raum ist, dann ist die Höhe eines effektiven Zyklus nicht negativ bezüglich basispunktfreien Geradenbündeln.

Im fünften Abschnitt wird für ein eigentliches Schema X über den ganzalgebraischen Zahlen O_K von K und für eine Morphismus $\varphi : X \to P$ über O_K die Höhenfunktion definiert durch $h_{\varphi;\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t} := h_{\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t} \circ \varphi_*$. Falls X und φ nur über K definiert sind, dann nimmt man in der obigen Definition noch die abgeschlossene Hülle des Zyklus in P. Neben der Multilinearität in den $\overline{\mathscr{L}}_j$ wird noch das Verhalten unter Basiswechsel beschrieben und die Höhe eines projektiven Unterraums berechnet.

Sind nun X und φ über O_K definiert, dann wird im sechsten Abschnitt untersucht, wie stark die Höhe $h_{\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t}$ durch die Isomorphieklassen von $\varphi^* \mathscr{L}_j |_{X_K}$ bestimmt ist. Die Lösung wird in der Transformationsformel gegeben, welche explizit die Differenz zweier solcher Höhen als Funktion der Metrikänderung und der „Differenz" der Geradenbündel über O_K angibt. Das Hauptproblem beim Beweis dieser Formel besteht darin, daß X keine Arakelov-Geometrie besitzt. Anstelle der arithmetischen Projektionsformel wird deshalb das Induktionslemma angewandt. Dies führt aber nur zum Erfolg, wenn man zuerst zahlreiche Vereinfachungen durchführt. Falls $\overline{P}$ ein multiprojektiver Raum ist und alle $\mathscr{L}_j$ basispunktfrei sind, dann läßt sich aus der Transformationsformel die Differenz der Höhen durch die Summe der Multigrade abschätzen.

Dies führt im Abschn. 7 dazu, daß es für ein projektives Schema X über einem Zahlkörper eine induzierte multilineare symmetrische Abbildung von $\mathrm{Pic}(X)^{t+1}$ in die Äquivalenzklassen der reellen Funktionen auf den Zyklen gibt. Dabei sollen zwei solche Funktionen äquivalent sein, wenn sich der Betrag ihrer Differenz durch ein Vielfaches des Grades bezüglich irgendeines sehr amplen Geradenbündels abschätzen läßt. Dieses Resultat wird aus dem schärferen Satz 7.2 gewonnen und dann wird auch noch die Funktorialität der Höhen gezeigt. In der obigen Terminologie sind also die Höhen von Faltings und Philippon äquivalent.

Im achten Abschnitt wird dann für eine abelsche Varietät die Néron-Tate Höhe $\widehat{h}_{\mathscr{L}_0,\ldots,\mathscr{L}_t}$ für symmetrische $\mathscr{L}_i$ eingeführt analog zum Fall $t = 0$. Die Néron-Tate Höhe ist in der Äquivalenzklasse von $h_{\mathscr{L}_0,\ldots,\mathscr{L}_t}$ charakterisiert durch $\widehat{h}_{\mathscr{L}_0,\ldots,\mathscr{L}_t} \circ m_* = m^{2t}\widehat{h}_{\mathscr{L}_0,\ldots,\mathscr{L}_t}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Damit lassen sich die Resultate aus Abschnitt 7 verschärfen, indem man auf die Äquivalenzklassen verzichten kann.

Dieser Artikel entspricht im wesentlichen meiner Dissertation an der ETH Zürich. Als Motivation für diese Arbeit diente ein Brief von G. Faltings an G. Wüstholz, in dem vorgeschlagen wurde, die Néron-Tate Höhe mit Hilfe eines projektiven regulären Modells über $\mathbb{Z}$ zu untersuchen. Diese Idee wurde von J. Kramer [Kr] weiterverfolgt, während ich analog zum klassischen Fall vorging.

1 Arithmetische Chowgruppen

In diesem Abschnitt werden die benötigten Resultate aus der Arakelov-Geometrie zusammengestellt, wobei [GS2] die Hauptreferenz ist. Sei K ein Zahlkörper und O_K der Ring der ganzalgebraischen Zahlen. Unter einer arithmetischen Varietät X über O_K soll so ein reguläres flaches Schema von endlichem Typ über $\operatorname{Spec} O_K$ verstanden werden, daß der zu $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ gehörige analytische Raum X_∞ projektiv ist. Diese projektive komplexe Mannigfaltigkeit ist die disjunkte Vereinigung der $[K : \mathbb{Q}]$ Mengen $X_\sigma = X \otimes_\sigma \mathbb{C}$, wobei σ die Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ durchläuft. Die komplexe Konjugation induziert eine Involution F_∞ auf X_∞. Es wird später die folgende Notation gebraucht:

$A^{p,p}(X) = \{\eta \mid \eta$ reelle Differentialform vom Typ (p,p) mit $F_\infty^*\eta = (-1)^p\eta\}$,

$D^{p,p}(X) = \{T \mid T$ reeller Strom vom Typ (p,p) mit $F_\infty^* T = (-1)^p T\}$,

$Z_t(X) = \{Z \mid Z$ Zyklus von X mit relativer Dimension t über $O_K\}$,

$R_t(X)$ die von $\{\mathrm{div}(f) \mid f \in K(Z)^*$ für einen Primzyklus Z aus $Z_{t+1}(X)\}$ erzeugte Untergruppe und

$CH_t(X) := Z_t(X)/R_t(X)$ die zugehörige Chowgruppe.

$Z^p(X)$ (bzw. $CH^p(X)$) ist entsprechend definiert, wobei die Dimension durch die Kodimension p ersetzt wird, und es wird im folgenden jeweils die besser geeignete Graduierung verwendet. Mit $Z_*(X)$ (bzw. $Z^*(X)$) wird die direkte Summe aller $Z_t(X)$ (bzw. $Z^p(X)$) bezeichnet. Falls auf die Graduierung keinen Wert gelegt wird, so schreibt man einfach $Z(X)$. Diese Notation wird sinngemäß auch bei den anderen Gruppen aus der obigen Liste benützt. $CH_{\text{fin}}(X)$ ist der Quotient, welcher entsteht, wenn man nur vertikale Zyklen und rationale Funktionen auf vertikalen Zyklen zuläßt. Jeder Zyklus $Z \in Z^p(X)$ definiert einen Strom $\delta_Z \in D^{p,p}(X)$ durch

$$\delta_Z(\eta) := \int\limits_{Z_\infty} \eta$$

für alle $(n-p, n-p)$-Formen η. Im folgenden wird $A^{p,p}(X)$ als Teilmenge von $D^{p,p}(X)$ angesehen, indem man $\omega \in A^{p,p}(X)$ mit demjenigen Strom identifiziert der eine $(n-p, n-p)$-Form η auf $\int \eta \wedge \omega$ abbildet. Falls g ein Strom ist, dann bezeichnet $g \wedge \omega$ denjenigen Strom, der einer Differentialform η das Bild $g(\omega \wedge \eta)$ zuordnet. Ferner seien d, ∂, $\bar{\partial}$ und d^c die üblichen Differentialoperatoren auf den Strömen, welche durch die komplexe Struktur gegeben sind (vgl. [GH]).

1.1 Definition. Ein Greenscher Strom zu $Z \in Z^p(X)$ ist ein Element g aus $D^{p-1,p-1}(X)$ mit $dd^c g + \delta_Z \in A^{p,p}(X)$. Diese Differentialform wird mit $\omega(Z, g)$ bezeichnet.

1.2 *Beispiel.* [GS1, 2.5] Sei $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe und $\| \ \|$ eine F_∞^*-invariante hermitesche Metrik auf dem von $\mathscr{L}$ induzierten komplexen Geradenbündel L auf X_∞. Die Menge der Isometrieklassen dieser Paare $(\mathscr{L}, \| \ \|)$ wird mit $\widehat{\operatorname{Pic}}(X)$ bezeichnet. Statt $(\mathscr{L}, \| \ \|)$ wird im folgenden meistens die kürzere Notation $\widehat{\mathscr{L}}$ gebraucht und auch die Klasse in $\widehat{\operatorname{Pic}}(X)$ wird so bezeichnet. Für einen regulären meromorphen Schnitt s gilt nach der Formel von Poicaré-Lelong

$$dd^c \log \|s\|^{-2} = c_1(L, \| \ \|) - \delta_{\operatorname{div}(s)},$$

wobei auf der linken Seite s als meromorpher Schnitt von L angesehen wird, der eine integrierbare Funktion $\log \|s\|^{-2}$ und somit ein Element aus $D^{0,0}(X)$ definiert. Dies zeigt, daß $\log \|s\|^{-2}$ ein Greenscher Strom zu $\operatorname{div}(s)$ ist.

1.3 *Beispiel.* Allgemeiner sei Z ein Primzyklus von X und s ein regulärer meromorpher Schnitt der Restriktion $\mathscr{L}|_Z$ von $\mathscr{L}$ auf Z, dann ist der Strom $\log \|s\|^{-2}$ gegeben durch die Vorschrift

$$\log \|s\|^{-2}(\eta) := \int\limits_{Z_\infty} \log \|s\|^{-2} \wedge \eta$$

für alle Differentialformen η. Es gilt die Gleichung

$$dd^c \log \|s\|^{-2} = \delta_Z \wedge c_1(L, \| \ \|) - \delta_{\operatorname{div}(s)}.$$

Wählt man jetzt $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$ mit der trivialen Metrik, dann ist $f = s$ eine rationale Funktion auf Z, $\log |f|^{-2}$ ist ein Greenscher Strom zu $\operatorname{div}(f)$ und das Paar $(\operatorname{div}(f), \log |f|^{-2})$ wird mit $\widehat{\operatorname{div}}(f)$ bezeichnet. Sei

$$\widehat{Z}^p(X) := \{(Z, g) \in Z^p(X) \times D^{p-1,p-1}(X) \mid g \text{ Greenscher Strom zu } Z\} / \big(\operatorname{Bild}(\partial) + \operatorname{Bild}(\bar{\partial})\big)$$

und $\widehat{R}^p(X)$ die von der Menge $\left\{\widehat{\operatorname{div}}(f) \mid f \in K(Z)^* \text{ für einen Primzyklus } Z \text{ der Kodimension } p-1\right\}$ erzeugte Untergruppe.

1.4 Definition. $\widehat{CH}^p := \widehat{Z}^p(X)/\widehat{R}^p(X)$ heißt die p-te arithmetische Chowgruppe von X .

In [GS2] wird auf $\widehat{CH}^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ eine kommutative, assoziative, graduierte Ringstruktur erklärt. Falls X glatt ist über O_K, dann ist $\widehat{CH}^*(X)$ selbst ein Ring. In dieser Arbeit wird nur die Aktion der ersten Chernklassen auf $\widehat{CH}^*(X)$ gebraucht und deshalb wird nur diese eingeführt.

1.5 Proposition. *Die Klasse von* $\widehat{\operatorname{div}}(s) := (\operatorname{div}(s), \log \|s\|^{-2})$ *hängt unter den Voraussetzungen von* (1.2) *nicht von der Wahl eines Schnittes* s *ab. Sie wird mit* $\widehat{c}_1(\mathscr{L}, \|\ \|)$ *bezeichnet und induziert einen Isomorphismus* $\widehat{c}_1 : \widehat{\operatorname{Pic}}(X) \xrightarrow{\sim} \widehat{CH}^1(X)$.

Beweis. [GS1, Proposition 2.5].

1.6 Man erhält für jedes $p \in \mathbb{N}$ eine bilineare Paarung $\widehat{CH}^1(X) \times \widehat{CH}^p(X) \to \widehat{CH}^{p+1}(X)$, die durch folgende Konstruktion gegeben wird: Sei Z ein Primzyklus von X, $(Z,g) \in \widehat{CH}^p(X)$, $(\mathscr{L}, \|\ \|) \in \widehat{\operatorname{Pic}}(X)$ und s ein regulärer meromorpher Schnitt von $\mathscr{L}\,|_Z$, dann ist $\widehat{c}_1(\mathscr{L}, \|\ \|).(Z,g)$ die Klasse von

$$(\operatorname{div}(s), \log \|s\|^{-2} + g \wedge c_1(L, \|\ \|))$$

in $\widehat{CH}^{p+1}(X)$. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von s und es gilt:

i) $\omega(\widehat{c}_1(\mathscr{L}, \|\ \|).(Z,g)) = c_1(L, \|\ \|) \wedge \omega(Z,g)$;

ii) $\widehat{c}_1(\mathscr{L}, \|\ \|).\widehat{c}_1(\mathscr{M}, \|\ \|).(Z,g) = \widehat{c}_1(\mathscr{M}, \|\ \|).\widehat{c}_1(\mathscr{L}, \|\ \|).(Z,g)$.

1.7 Sei $f : X' \to X$ ein eigentlicher Morphismus über O_K zwischen den arithmetischen Varietäten X' und X, der glatt ist auf der generischen Faser. Durch die entsprechenden Abbildungen für Zyklen und Ströme wird ein Gruppenhomomorphismus $f_* : \widehat{Z}_*(X') \to \widehat{Z}_*(X)$ definiert. Er induziert eine Abbildung zwischen den Chowgruppen, welche ebenfalls mit f_* bezeichnet wird. Für $(\mathscr{L}, \|\ \|) \in \widehat{\operatorname{Pic}}(X)$ und $(Z', g') \in \widehat{CH}_*(X')$ gilt die Projektionsformel:

$$f_*(\widehat{c}_1(f^*(\mathscr{L}, \|\ \|)).(Z', g')) = \widehat{c}_1(\mathscr{L}, \|\ \|).f_*(Z', g').$$

1.8 Definition. Eine Arakelov-Varietät $\overline{X}$ ist ein Paar (X, w), wobei X eine arithmetische Varietät und ω eine Kählerform auf X_∞ ist, so daß $F_\infty^* \omega = -\omega$ gilt. Eine F_∞^*-invariante Metrik $\|\ \|$ zum Geradenbündel $\mathscr{L}$ heißt zulässig, falls $c_1(L, \|\ \|)$ harmonisch ist. Die Isometrieklassen von Geradenbündeln mit zulässiger Metrik bilden eine Untergruppe von $\widehat{\operatorname{Pic}}(X)$, welche mit $\operatorname{Pic}(\overline{X})$ bezeichnet wird. Die Elemente von $\operatorname{Pic}(\overline{X})$ wie auch ihre Repräsentanten werden mit $\overline{\mathscr{L}}$ bezeichnet.

Zu jedem Geradenbündel $\mathscr{L}$ von X existiert eine zulässige Metrik; sie ist eindeutig bestimmt bis auf Multiplikation mit einem positiven Skalar. Wegen (1.5) ist dies eine Folgerung der nächsten Proposition. Es sei H die harmonische Projektion von den

Strömen auf die harmonischen Formen. Sie ist die duale Abbildung zur orthogonalen Projektion von den Differentialformen auf die harmonischen Formen.

1.9 Proposition. *Falls $\overline{X}$ eine Arakelovvarietät ist, dann existiert zu einem Zyklus $Z \in Z^p(X)$ genau ein Element $\widehat{Z} \in \widehat{Z}^p(X)$ mit den Eigenschaften:*

i) *es existiert ein Greenscher Strom g zu Z derart, daß $\widehat{Z}$ repräsentiert wird durch (Z, g);*
ii) *$\omega(\widehat{Z})$ ist harmonisch:*
iii) *die harmonische Projektion $H(g)$ von g ist gleich 0.*

Diese Definition wird in [Fa] für multiprojektive Räume verwendet und überträgt sich sofort auf den Fall einer Arakelov-Varietät. $\widehat{Z}$ heißt der Arakelov-Zyklus von Z. Es ist im folgenden zu unterscheiden zwischen der in 1.5 eingeführten Notation $\widehat{\mathrm{div}}(s)$ und dem Arakelovzyklus $\widehat{\mathrm{div}(s)}$ von $\mathrm{div}(s)$.

1.10 Der Grad von $(\mathcal{L}, \| \ \|) \in \widehat{\mathrm{Pic}}(O_K)$ ist definiert durch

$$\mathrm{Grad}(\mathcal{L}, \| \ \|) := \log \#\big(\Gamma(\mathcal{L})/O_K s\big) - \sum_{\sigma} \log \|s \otimes_\sigma 1\| ,$$

wobei σ die Einbettungen von O_K in $\mathbb{C}$ durchläuft. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des globalen Schnittes $s \in \Gamma(\mathcal{L}) \setminus \{0\}$. Mit Hilfe von (1.5) erhält man einen Homomorphismus

$$\mathrm{Grad} : \widehat{CH}^1(O_K) \to \mathbb{R},$$

gegeben durch die Vorschrift

$$\Big(\sum_{Z_j \text{ prim}} n_j Z_j, g \Big) \mapsto \sum_j n_j \log \#K(Z_j) + \frac{1}{2} g(1) . \tag{1}$$

Da $(\mathrm{Spec}\, O_K)_\infty$ die disjunkte Vereinigung von $[K : \mathbb{Q}]$ Punkten P_σ ist, kann g als Funktion angesehen werden und damit läßt sich das Bild auch als

$$\sum_j n_j \log \#K(Z_j) + \frac{1}{2} \sum_\sigma g(P_\sigma)$$

schreiben. Für $K = \mathbb{Q}$ ist diese Abbildung sogar ein Isomorphismus.

Für ein eigentliches O_K-Schema X mit Strukturmorphismus π hat man jetzt einen Homomorphismus

$$(CH_{\mathrm{fin}})_{-1}(X) \to \mathbb{R}, \quad Z \mapsto \mathrm{Grad}(\pi_*(Z), 0) ,$$

der wieder mit Grad bezeichnet werden soll. Falls X auch noch eine arithmetische Varietät ist, dann faktorisiert diese Abbildung auf natürliche Art und Weise durch den auf $\widehat{CH}_{-1}(X)$ definierten Homomorphismus $\mathrm{Grad} \circ \pi_*$ und deshalb soll auch letztere Abbildung mit Grad abgekürzt werden. Die Vorschrift (1) bleibt für diesen Homomorphismus sinngemäß gültig.

2 Multiprojektive Räume

Im folgenden sei $P := \mathbb{P}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$, p_j die Projektion von P auf den j-ten Faktor $\mathbb{P}^{n_j}$ und $\mathcal{O}_P(e_j) := p_j^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_j}}(1)$.

2.1 Gehen wir aus von einem Dedekindring R, dann ist die Abbildung

$$CH^*(R)[t_0, \ldots, t_r]/(t_0^{n_0+1}, \ldots, t_r^{n_r+1}) \to CH^*(P_R),$$

die t_j das Element $c_1(\mathcal{O}_{P_R}(e_j))$ zuordnet, ein graduierter Ringisomorphismus [Fu, Theorem 3.3 and Chap. 20].

2.2 Durch die Wahl von Koordinaten $(x_l)_{0 \le l \le n_j}$ auf $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{n_j}$ besitzt das zu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_j}}(-1)$ gehörige komplexe Geradenbündel eine natürliche Metrik [GH, p. 150] und durch Bildung der Dual- oder Tensormetrik erhält man einen Homomorphismus $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{n_j}) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{n_j})$. Dabei ist die Norm des globalen Schnittes x_l von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_j}}(1)$ überall kleiner oder gleich 1 für alle $l \in \{0, \ldots, n_j\}$.

2.3 Die (1,1)-Form zur Fubini-Study Metrik auf $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n_j}$ ist gleich $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_j}}(1), \|\ \|)$ [GH, p. 150] und damit eine Kählerform. Die Produktmetrik von P wird zu einer Kähler-Metrik mit assoziierter (1,1)-Form $c_0 + \cdots + c_r$, wobei $c_j := p_j^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_j}}(1), \|\ \|)$. $H_{DR}^*(P_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ ist isomorph zum Raum der harmonischen Formen [GH, p. 116] und damit isomorph zu $\mathbb{C}[t_0, \ldots, t_r]/(t_0^{n_0+1}, \ldots, t_r^{n_r+1})$, wie die Künneth-Formel [GH, p. 104] zeigt. Dabei entspricht die Variable t_j der harmonischen Form c_j.

2.4 Mit (2.1) wird nun klar, daß man einen Isomorphismus $CH^*(P_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \to H_{DR}^*(P_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ hat, der jeder Zyklenklasse die Fundamentalklasse zuordnet. Dabei wird $c_1(\mathcal{O}_P(e_j))$ auf die Klasse von c_j in $H_{DR}^*(P_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ abgebildet. Alle obigen Isomorphismen respektieren die Ringstruktur und die Graduierung.

3 Der Grad

Gegeben sei in diesem Abschnitt ein vollständiges Schema X über dem Körper k mit Strukturmorphismus $\pi : X \to k$.

3.1 Definition. Für jedes $t \in \{0, \ldots, \dim X\}$ definiert man für ein t-Tupel $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t)$ von Geradenbündeln eine Abbildung $d_{\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t} : CH_t(X) \to \mathbb{Z}$, indem man einem homogenen Element α vom Grad t aus der Chowgruppe von X das Bild

$$d_{\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t}(\alpha) := \pi_*\big(c_1(\mathcal{L}_1). \cdots .c_1(\mathcal{L}_t).\alpha\big) \in CH_0(k) \cong \mathbb{Z}$$

zuordnet.

Die in der Definition verwandte Chernklassoperation ist in [Fu, 2.5] erklärt. Die induzierte Abbildung $d : \mathrm{Pic}(X)^t \to \mathbb{Z}^{CH_t(X)}$ ist symmetrisch, multilinear und ihr Bild ist in $\mathrm{Hom}(CH_t(X), \mathbb{Z})$ enthalten.

3.2 Proposition. *Sei $f : X' \to X$ ein k-Morphismus zwischen vollständigen Schemata über k und seien $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t \in \mathrm{Pic}(X)$, dann gilt $d_{\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_t} \circ f_* = d_{f^*(\mathcal{L}_1), \ldots, f^*(\mathcal{L}_t)}$.*

Beweis. Dies folgt aus der Projektionsformel [Fu, Proposition 2.5].

3.3 Proposition. *Falls die Geradenbündel $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_t$ von globalen Schnitten erzeugt werden und Z ein positiver Zyklus ist, dann gilt $d_{\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_t}(Z) \geq 0$.*

Beweis. Es darf angenommen werden, daß Z ein Primzyklus ist. Die Einschränkung von $\mathscr{L}_t$ auf Z wird ebenfalls erzeugt von globalen Schnitten und deshalb ist $c_1(\mathscr{L}_t).Z$ die rationale Äquivalenzklasse eines positiven Zyklus. Mit Induktion folgt die Behauptung.

3.4 *Bemerkung.* Sei jetzt X ein vollständiges Schema über den ganzalgebraischen Zahlen O_K eines Zahlkörpers K. Die generische Faser von X wird mit X_K identifiziert. Man hat einen Homomorphismus $\phi : Z_t(X) \to Z_t(X_K)$, der jedem Primzyklus Z den Primzyklus $Z \cap X_K$ zuordnet. Dabei verschwinden alle Primzyklen in den endlichen Fasern und für die anderen Primzyklen induziert ϕ eine Bijektion.

Sei nun z der generische Punkt des Primzyklus Z. Gilt $z \in X_K$, so folgt aus der Tatsache $\mathscr{O}_{z,Z} \cong \mathscr{O}_{z,Z\cap X_K}$ [EGA I, 3.4.4], daß ϕ eine Abbildung zwischen den Chowringen induziert, welche man wieder mit ϕ bezeichnet und für die man $\phi(c_1(\mathscr{L}).Z) = c_1(\mathscr{L}|_{X_K}).\phi(Z)$ erhält für alle $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(X)$.

Da $CH^0(O_K) \cong \mathbb{Z}$ ist, übertragen sich (3.1)–(3.3) auf vollständige Schemata über O_K. In diesem Fall folgt dann $d_{\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_t}(\alpha) = d_{\mathscr{L}_1|X_K,\ldots,\mathscr{L}_t|X_K}(\phi(\alpha))$ für alle $\alpha \in CH_t(X)$ und $\mathscr{L}_j \in \mathrm{Pic}(X)$.

3.5 Proposition. *Sei $L \supseteq k$ eine endlich-dimensionale Körpererweiterung, $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_t \in \mathrm{Pic}(X)$ und $q : X_L \to X$ die kanonische Projektion. Dann gilt*

i) $d_{\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_t} \circ q_* = [L : k] d_{q^*\mathscr{L}_1,\ldots,q^*\mathscr{L}_t}$;

ii) $d_{q^*\mathscr{L}_1,\ldots,q^*\mathscr{L}_t} \circ q^* = d_{\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_t}$.

Beweis. Mit (3.2) und Basiswechsel von $\mathrm{Spec}\, k$ auf $\mathrm{Spec}\, L$ folgt i). Die zweite Behauptung ist eine Folgerung von i), weil $q_* q^*$ der Multiplikation mit $[L : k]$ entspricht [Fu, Example 1.7.4].

3.6 Proposition. *Gegeben seien $P := \mathbb{P}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$, ein Unterkörper k von $\mathbb{C}$ und $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_t \in \mathrm{Pic}(P_k)$. Dann gilt für jeden t-dimensionalen Zyklus Z von P_k*

$$d_{\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_t}(Z) = \int_{Z_{\mathbb{C}}} c_1(L_1) \wedge \ldots \wedge c_1(L_t),$$

wobei L_j das komplexe Geradenbündel auf $P_{\mathbb{C}}$ ist, welches von $\mathscr{L}_j$ induziert wird.

Beweis. Nach [Fu, Example 6.2.9] sind die Operationen der Schnitttheorie kompatibel mit Basiswechsel und deshalb darf man annehmen, daß $k = \mathbb{C}$ ist. In diesem Fall weiß man aber daß die Fundamentalklasse der Divisorenklasse $c_1(\mathscr{L}_j)$ gleich der de Rham Klasse $c_1(L_j)$ ist [GH, p. 141]. Weil nach (2.4) das Wedgeprodukt der Fundamentalklassen dem Schnittprodukt der Zyklenklassen entspricht, folgt

$$\int_Z c_1(L_1) \wedge \ldots \wedge c_1(L_t) = \int_{c_1(\mathscr{L}_1)\ldots c_1(\mathscr{L}_t).Z} 1 = d_{\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_t}(Z).$$

4 Die Höhe

Über den ganzalgebraischen Zahlen O_K eines Zahlkörpers K sei eine projektive Arakelov-Varietät $\overline{P}$ so gegeben, daß die harmonischen Differentialformen von $\overline{P}$ einen Ring bilden.

4.1 Definition. Für festes $t \in \{-1, \dots, n\}$ ist die Höhe $h_{\widehat{\mathscr{L}_0}, \dots, \widehat{\mathscr{L}_t}}(Z)$ eines Zyklus $Z \in Z_t(P)$ bezüglich $\widehat{\mathscr{L}_0}, \dots, \widehat{\mathscr{L}_t} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(P)$ definiert durch

$$h_{\widehat{\mathscr{L}_0}, \dots, \widehat{\mathscr{L}_t}}(Z) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \operatorname{Grad}\left(\widehat{c}_1\left(\widehat{\mathscr{L}_0}\right) \dots \widehat{c}_1\left(\widehat{\mathscr{L}_t}\right).\widehat{Z}\right).$$

4.2 Proposition. *Die Abbildung* $h : \widehat{\mathrm{Pic}}(P)^{t+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{Z_t(P)}$, *gegeben durch* $\left(\widehat{\mathscr{L}_0}, \dots, \widehat{\mathscr{L}_t}\right) \mapsto h_{\widehat{\mathscr{L}_0}, \dots, \widehat{\mathscr{L}_t}}$, *ist multilinear und symmetrisch bezüglich aller Variablen.*

Beweis. Dies folgt aus (1.5) und (1.6).

4.3 Proposition. *Seien* $t \in \{0, \dots, n\}$, $\overline{\mathscr{L}}_0, \dots, \overline{\mathscr{L}}_t$ *Geradenbündel von* $\overline{P}$ *mit gegebener zulässiger Metrik und* $Z \in Z_t(P)$ *ein Primzyklus. Dann gilt für jeden regulären meromorphen Schnitt* s *von* $\mathscr{L}_t|_Z$*:*

$$h_{\overline{\mathscr{L}}_0, \dots, \overline{\mathscr{L}}_t}(Z) = h_{\overline{\mathscr{L}}_0, \dots, \overline{\mathscr{L}}_{t-1}}(\operatorname{div}(s)) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \int_{Z_\infty} \log \|s\| c_1(\bar{L}_0) \wedge \dots \wedge c_1(\bar{L}_{t-1}).$$

Beweis. Das Element $\widehat{c}_1\left(\overline{\mathscr{L}}_t\right).\widehat{Z} - \widehat{\operatorname{div}(s)}$ von $\widehat{CH}_{t-1}(P)$ kann in der Form $(0, \eta)$ mit einer Differentialform η repräsentiert werden. Also gilt

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathscr{L}}_0, \dots, \overline{\mathscr{L}}_t}(Z) &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \operatorname{Grad}\left(\widehat{c}_1\left(\overline{\mathscr{L}}_0\right) \dots \widehat{c}_1\left(\overline{\mathscr{L}}_{t-1}\right).\left(\widehat{\operatorname{div}(s)} + (0,\eta)\right)\right) \\ &= h_{\overline{\mathscr{L}}_0, \dots, \overline{\mathscr{L}}_{t-1}}(\operatorname{div}(s)) + \frac{1}{2[K:\mathbb{Q}]} \int_{P_\infty} c_1(\bar{L}_0) \wedge \dots \wedge c_1(\bar{L}_{t-1}) \wedge \eta. \end{aligned}$$

Ist der Arakelov-Zyklus $\widehat{\operatorname{div}(s)}$ repräsentiert durch $(\operatorname{div}(s), h)$ und $\widehat{Z}$ durch (Z, g), so darf man annehmen, daß $\eta = \log \|s\|^{-2} + g \wedge c_1(\bar{L}_t) - h$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathscr{L}}_0, \dots, \overline{\mathscr{L}}_t}(Z) = h_{\overline{\mathscr{L}}_0, \dots, \overline{\mathscr{L}}_{t-1}}(\operatorname{div}(s)) &- \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \int_{Z_\infty} \log \|s\| c_1(\bar{L}_0) \wedge \dots \wedge c_1(\bar{L}_{t-1}) \\ &+ \frac{1}{2[K:\mathbb{Q}]} \Big(g\big(c_1(\bar{L}_0) \wedge \dots \wedge c_1(\bar{L}_t)\big) \\ &\qquad - h\big(c_1(\bar{L}_0) \wedge \dots \wedge c_1(\bar{L}_{t-1})\big)\Big). \end{aligned}$$

Da die beiden letzten Summanden wegen der dritten Bedingung aus (1.9) gleich Null sind, folgt die Behauptung.

4.4 Sei jetzt $P := \mathbb{P}^{n_0}_{O_K} \times_{O_K} \dots \times_{O_K} \mathbb{P}^{n_r}_{O_K}$ ein multiprojektiver Raum und auf jedem Faktor seien Koordinaten gegeben wie in (2.2). Mit der Kähler-Metrik aus (2.3) wird P zu einer Arakelov-Varietät $\overline{P}$. Man hat einen wohldefinierten Monomorphismus $\overline{\mathscr{O}}$ von der freien abelschen Gruppe A mit Basis e_j, $0 \le j \le r$, in die Geradenbündel mit zulässiger Metrik von P, welcher e_j das Geradenbündel $\mathscr{O}_P(e_j)$ mit der in (2.2) erwähnten Metrik zuordnet.

4.5 Proposition (Faltings, [Fa]). *Gegeben seien natürliche Zahlen m_{ij}, $0 \leq i \leq r$ und $0 \leq j \leq t$. Dann ist die Höhe eines effektiven Zyklus Z der relativen Dimension t bezüglich $\overline{\mathscr{O}}(\alpha_0), \ldots, \overline{\mathscr{O}}(\alpha_t)$ nicht negativ, wobei $\alpha_i := \sum_{j=0}^{r} m_{ij} e_j$ gesetzt wurde.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei Z prim. Für jedes $j \in \{0, \ldots, t\}$ existiert eine Standardkoordinate x_j von $\mathbb{P}^{n_j}$, welche auf Z nicht identisch verschwindet. Für den globalen Schnitt $s := x_0^{m_{t0}} \ldots x_r^{m_{tr}}$ von $\overline{\mathscr{O}}(\alpha_t)$ ist die Norm nie größer als 1 (s. (2.2)). Durch induktives Anwenden von Proposition 4.3 folgt mit

$$\int_{Z_\infty} \log \|s\| c_1(\overline{\mathscr{O}}(\alpha_0)) \wedge \ldots \wedge c_1(\overline{\mathscr{O}}(\alpha_{t-1})) \leq 0$$

die Behauptung, weil der Fall $t = -1$ trivial ist.

5 Höhen induziert von einem Morphismus

Gegeben seien ein algebraisches Schema X über O_K, $\overline{P}$ wie in Abschn. 4 und ein eigentlicher Morphismus $\varphi : X \to P$ über O_K.

5.1 Definition. Für $t \in \{-1, \ldots, \dim X\}$, $Z \in Z_t(X)$ und $\widehat{\mathscr{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathscr{L}_t} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(P)$ setzen wir

$$h_{\varphi; \widehat{\mathscr{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathscr{L}_t}}(Z) := h_{\widehat{\mathscr{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathscr{L}_t}}(\varphi_*(Z)).$$

Falls X und φ nur über K definiert sind, dann ersetzt man in der obigen Definition den Zyklus $\varphi_*(Z)$ durch seine abgeschlossene Hülle in P. Die beiden nächsten Propositionen sind in beiden Fällen gültig.

5.2 Proposition. *Die Abbildung $h_\varphi : \widehat{\mathrm{Pic}}(P)^{t+1} \to \mathbb{R}^{Z_t(X)}$, $\left(\widehat{\mathscr{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathscr{L}_t}\right) \mapsto h_{\varphi; \widehat{\mathscr{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathscr{L}_t}}$, ist multilinear und symmetrisch.*

Beweis. Dies ist eine Konsequenz aus (4.2).

Die nächste Proposition zeigt das Verhalten der Höhe unter Basiswechsel. Dazu sei L eine endlich-dimensionale Körpererweiterung von K und $(R, S) \in \{(K, L), (O_K, O_L)\}$. Die Strukturmorphismen werden mit π bezeichnet, ferner seien X und φ über R definiert. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_S \arrow[r, "\varphi_S"] \arrow[d, "q''"'] & P_{O_L} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q'"] & O_L \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "\varphi"] & P \arrow[r, "\pi"] & O_K
\end{tikzcd}$$

seien der Morphismus q durch die Inklusion $O_K \subseteq O_L$ gegeben und die Morphismen q' und q'' durch Basiswechsel induziert.

5.3 Proposition. *Es gelten die folgenden zwei Eigenschaften:*

i) $h_{\varphi; \widehat{\mathscr{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathscr{L}_t}} \circ q''_* = [L : K] h_{\varphi_S; q'^*\left(\widehat{\mathscr{L}_0}\right), \ldots, q'^*\left(\widehat{\mathscr{L}_t}\right)}$;

ii) $h_{\varphi_S; q'^*\left(\widehat{\mathscr{L}_0}\right), \ldots, q'^*\left(\widehat{\mathscr{L}_t}\right)} \circ q''^* = h_{\varphi; \widehat{\mathscr{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathscr{L}_t}}$.

Beweis. Dies zeigt man mit Hilfe der arithmetischen Projektionsformel (1.7) analog wie die Proposition 3.5.

5.4 Sei V ein $t+1$ dimensionaler Unterraum von $\overline{\mathbb{Q}}^{n+1}$ und $\mathbb{P}(V) \subseteq \mathbb{P}^n_{\overline{\mathbb{Q}}}$ die Projektivierung. Wir wollen die Höhe von $\mathbb{P}(V)$ bezüglich den $t+1$ metrisierten Geradenbündeln $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^n}(1), \dots, \overline{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^n}(1)$ berechnen. Da in diesem Beispiel nur Höhen bezüglich diesen Standardbündeln betrachtet werden, verzichten wir auf die Indizes und bezeichnen zum Beispiel die Höhe von $\mathbb{P}(V)$ mit $h(\mathbb{P}(V))$. Die Varietät $\mathbb{P}(V)$ ist über einem genügend großen Zahlkörper K definiert und $h(\mathbb{P}(V))$ ist dann die Höhe des entsprechenden Zyklus über K. Proposition 5.3 zeigt, daß diese Zahl unabhängig ist von der Wahl des Zahlkörpers K. Wir dürfen somit annehmen, daß V ein $t+1$ dimensionaler Unterraum von K^{n+1} ist. Für eine Basis $a_0, \dots, a_t$ von W soll $P_{a_0,\dots,a_t}$ der Koordinatenvektor von $a_0 \wedge \dots \wedge a_t$ bezüglich der Standardbasis von $\wedge^{t+1}(K^{n+1})$ sein. Die Einträge von $P_{a_0,\dots,a_t}$ induzierten Punktes P_V in $\mathbb{P}\left(\wedge^{t+1}\left(K^{n+1}\right)\right)$ heißen die Plückerkoordinaten von V. Es sei P ein Punkt aus $\mathbb{P}^m$ mit Koordinatenvektor $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_m) \in K^{m+1}$ und v eine Stelle aus der in der Einleitung definierten Menge M_K. Mit der Bezeichnung

$$|\underline{\alpha}|_v := \begin{cases} \max\limits_{i=0,\dots,m} |\alpha_i|_v & \text{falls } v \text{ nicht archimedisch} \\ \left(\sum\limits_{i=0}^{m} |\alpha_i|_v^2\right)^{1/2} & \text{falls } v \text{ archimedisch} \end{cases}$$

definieren wir durch

$$h'(P) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log |\underline{\alpha}|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}$$

eine Höhe, die äquivalent ist zu der in der Einleitung beschriebenen Weilhöhe. Zur Illustration beweisen wir das folgende in [BGS] erwähnte Resultat:

5.5 Proposition. (siehe [BGS]) *Die Höhe des projektiven Unterraums $\mathbb{P}(V)$ wird gegeben durch*

$$h(\mathbb{P}(V)) = h'(P_V) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}\,.$$

Beweis. Sei W ein Unterraum von V der Kodimension 1. Um die gewünschte Aussage zu beweisen, genügt es offensichtlich die Formel

$$h(\mathbb{P}(V)) - h(\mathbb{P}(W)) = h'(P_V) - h'(P_W) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{j} \tag{2}$$

herzuleiten. Falls dabei W der Nullraum ist, soll $\mathbb{P}(W)$ der Nullzyklus und P_W der einzige Punkt von $\mathbb{P}^0$ sein. Mit den richtigen Konventionen ist dieser Fall im folgenden Beweis eingeschlossen. Wir bezeichnen mit Z (bzw. Y) den Zariskiabschluß von $\mathbb{P}(V)$ (bzw. $\mathbb{P}(W)$) in $\mathbb{P}^n_{O_K}$. Es existiert eine Linearform s auf K^{n+1}, deren Einschränkung auf W im Gegensatz zur Einschränkung auf V verschwindet. Dieses lineare Funktional kann identifiziert werden mit einem globalen Schnitt von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Es gilt dann nach Proposition 4.3 und mit der Notation aus 2.3

$$h(Z) = h(\operatorname{div}(s).Z) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \int_{Z_\infty} \log \|s\| c_1^t \,. \tag{3}$$

Zuerst wollen wir nun $\operatorname{div}(s).Z - Y$ berechnen. Es ist klar, daß dieser Zyklus gleich den vertikalen Komponenten von $\operatorname{div}(s).Z$ ist. Sei R der Bewertungsring einer nichtarchimedischen Stelle v aus M_K. Nach einem Satz aus der Elementarteilertheorie findet man eine Basis $b_0, \ldots, b_t$ von $V \cap R^{n+1}$ so, daß $b_0, \ldots, b_{t-1}$ eine Basis von $W \cap R^{n+1}$ ist. In der Notation wird unterschlagen, daß diese Basis von der Stelle v abhängt. Bezeichnen wir mit $k(v)$ den Residuenkörper von v, dann sind die Bilder $\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_t$ unter der Reduktionsabbildung $R^{n+1} \to k(v)^{n+1}$ eine Basis des Bildes $\bar{V}$ von V. Die Faser von Z über der Stelle v ist gerade gleich $\mathbb{P}(\bar{V}) \subseteq \mathbb{P}^n_{k(v)}$. Ebenso gilt $Y_{k(v)} = \mathbb{P}(\bar{W})$ und $\bar{W}$ besitzt die Basis $\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_{t-1}$. Damit schließen wir

$$\left|P_{b_0,\ldots,b_t}\right|_v = \left|P_{b_0,\ldots,b_{t-1}}\right|_v = 1\,. \tag{4}$$

Die Multiplizität von $Z_{k(v)}$ in $\operatorname{div}(s).Z$ ist gleich der Ordnung von $s(b_t)$ im diskreten Bewertungsring R. Die Proposition 6.2 und (1.10) zeigen, daß die Höhe von $Z_{k(v)}$ gleich $\dfrac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \# k(v)$ ist. Zusammen ergibt sich die Formel

$$h(Y) - h(\operatorname{div}(s).Z) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum \log \left|s(b_t)\right|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}, \tag{5}$$

wobei v alle nichtarchimedischen Stellen von M_K durchläuft. Wir schreiten nun zur Berechnung des Integrals in (3). Mit Hilfe von [St, Lemma 2.1] findet man

$$\int_{P^m_{\mathbb{C}}} \log \|x_0\| c_1^m = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\,. \tag{6}$$

Sei σ eine Einbettung von K in $\mathbb{C}$ und v der zugehörige archimedische Betrag. Es existiert eine orthonormale Basis $b_0, \ldots, b_t$ von $V \otimes_\sigma \mathbb{C}$ derart, daß $b_0, \ldots, b_{t-1}$ in $W \otimes_\sigma \mathbb{C}$ liegt. Wegen der $U(n+1, \mathbb{C})$-Invarianz der Chernform c_1 ist die Gleichung

$$\int_{Z \otimes_\sigma \mathbb{C}} \log \|s\| c_1^t = \log \left|s(b_t)\right|_v - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{j} \tag{7}$$

eine Folgerung von (6) und Proposition 3.6. Als Zwischenresultat aus (3), (5) und (7) halten wir

$$h(\mathbb{P}(V)) - h(\mathbb{P}(W)) = -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log \left|s(b_t)\right|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{j} \tag{8}$$

fest. Unabhängig von der Wahl einer Stelle fixieren wir jetzt eine Basis $a_0, \ldots, a_t$ von V mit der Eigenschaft $a_0, \ldots, a_{t-1} \in W$. Man hat die Darstellung

$$a_j = \sum_{k=0}^{t} c_{jk} b_k$$

mit eindeutigen Zahlen c_{jk} aus K, und es gilt $c_{t0} = \cdots = c_{t,t-1} = 0$. Wir bezeichnen mit C die $(t+1) \times (t+1)$ Matrix (c_{jk}) und mit (D) diejenige $t \times t$ Untermatrix von C, die man durch Streichen der letzten Zeile und der letzten Spalte erhält. Wegen der Orthonormalität gilt (4) auch für archimedische Stellen. Deshalb folgt aus den 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} P_{a_0,\ldots,a_t} &= \det(C) P_{b_0,\ldots,b_t} \\ P_{a_0,\ldots,a_{t-1}} &= \det(D) P_{b_0,\ldots,b_{t-1}} \\ s(a_t) &= c_{tt} s(b_t) \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\left|s(b_t)\right|_v \left|P_{a_0,\ldots,a_t}\right|_v = \left|s(a_t)\right|_v \left|P_{a_0,\ldots,a_{t-1}}\right|_v . \tag{9}$$

Die Formel (2) ist nun eine Folge von (8), (9) und der Produktformel.

6 Die Transformationsformel

Gegeben sei in diesem Abschnitt ein Zahlkörper K. Unter $\overline{P}$ und $\overline{P}'$ sollen Arakelov-Varietäten über O_K verstanden werden, deren harmonische Formen einen Ring bilden. Mit π sollen alle Strukturmorphismen bezeichnet werden.

6.1 X sei ein eigentliches Schema über O_K. Weiter seien $\varphi : X \to P$ ein O_K-Morphismus und $\widehat{\mathscr{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathscr{L}_t} \in \widehat{\operatorname{Pic}}(P)$. Im folgenden soll untersucht werden, wie stark die Isomorphieklassen

$$\mathscr{M}_j := \left[\varphi^*\left(\mathscr{L}_j\right)\right] \in \operatorname{Pic}(X) \quad (0 \le j \le t)$$

die Höhe $h_{\varphi;\widehat{\mathscr{L}_0},\ldots,\widehat{\mathscr{L}_t}}$ bestimmen. In der nächsten Proposition sollen die Schnittoperationen in $CH_{\text{fin}}(X)$ gebildet werden. Der Homomorphismus Grad wurde in (1.10) eingeführt.

6.2 Proposition. *Unter den Voraussetzungen von* (6.1) *gilt für jeden vertikalen Zyklus* $Z \in Z_t(X)$:

$$h_{\varphi;\widehat{\mathscr{L}_0},\ldots,\widehat{\mathscr{L}_t}}(Z) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \operatorname{Grad}\left(c_1(\mathscr{M}_0)\ldots c_1(\mathscr{M}_t).Z\right).$$

Beweis. Da Z vertikal ist, gilt

$$[K:\mathbb{Q}] h_{\varphi;\widehat{\mathscr{L}_0},\ldots,\widehat{\mathscr{L}_t}}(Z) = \operatorname{Grad}\left(\widehat{c}_1\left(\widehat{\mathscr{L}_0}\right)\ldots\widehat{c}_1\left(\widehat{\mathscr{L}_t}\right).(\varphi_* Z, 0)\right)$$

und dies ist gleich

$$\operatorname{Grad}(c_1(\mathscr{L}_0)\ldots c_1(\mathscr{L}_t).\varphi_* Z).$$

Aus der Projektionsformel folgt damit die Behauptung.

6.3 Lemma. *Gegeben sei jetzt ein vollständiges Schema X über O_K (bzw. K), ein Morphismus $\psi : X \to P'$ über O_K (bzw. K) und ein Morphismus $a : P' \to P$ über O_K, sowie Geradenbündel $\overline{\mathscr{L}}_0, \ldots, \overline{\mathscr{L}}_t$ von $\overline{P}$ mit zulässiger Metrik. Falls die Metriken von $\overline{\mathscr{L}}_j' := a^*(\overline{\mathscr{L}}_j)$, $0 \leq j \leq t$, zulässig sind, dann gilt*

$$h_{a\circ\psi;\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t} = h_{\psi;\overline{\mathscr{L}}_0',\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t'}.$$

Beweis. Es darf angenommen werden, daß $X = P'$ ist. Der Beweis wird mit Induktion nach t geführt. Proposition 6.2 zeigt die Behauptung für $t = -1$. Sei Z ein Primzyklus von P' der relativen Dimension t, dann existiert ein regulärer meromorpher Schnitt s von $\mathscr{L}_t\,|_{a_*(Z)}$. Nach Proposition 4.3 und mit der Induktionsvoraussetzung erhält man:

$$\begin{aligned} h_{a;\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t}(Z) &= h_{\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_{t-1}}(\operatorname{div}(s)) - \int\limits_{a_*(Z)_\infty} \log\|s\| c_1(\overline{L}_0) \wedge \ldots \wedge c_1(\overline{L}_{t-1}) \\ &= h_{a;\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_{t-1}}(\operatorname{div}(a^*s)) - \int\limits_{a_*(Z)_\infty} \log\|s\| c_1(\overline{L}_0) \wedge \ldots \wedge c_1(\overline{L}_{t-1}) \\ &= h_{a;\overline{\mathscr{L}}_0',\ldots,\overline{\mathscr{L}}_{t-1}'}(\operatorname{div}(a^*s)) - \int\limits_{Z_\infty} a^*(\log\|s\|) c_1(\overline{L}_0') \wedge \ldots \wedge c_1(\overline{L}_{t-1}') \end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung.

6.4 Korollar. *Gegeben seien ein vollständiges Schema X über O_K (bzw. K), ein Morphismus $\varphi : X \to P$ über O_K (bzw. K) und Elemente $\overline{\mathscr{L}}_0, \ldots, \overline{\mathscr{L}}_t$ aus* $\operatorname{Pic}(\overline{P})$. *Weiter sei p_k die k-te Projektion vom t-fachen Produkt P^t auf P und $\Delta : P \to P^t$ der Diagonalmorphismus, dann erhält man*

$$h_{\Delta\circ\varphi;p_0^*(\overline{\mathscr{L}}_0),\ldots,p_t^*(\overline{\mathscr{L}}_t)} = h_{\varphi;\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t}.$$

Beweis. Die Voraussetzungen von Lemma 6.3 sind erfüllt für $a = \Delta$.

6.5 Korollar. *Gegeben seien ein vollständiges Schema X über O_K (bzw. K) und zwei Morphismen $\varphi : X \to P$, $\psi : X \to P'$ über O_K (bzw. K), sowie $\widehat{\mathscr{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathscr{L}_t} \in$* $\widehat{\operatorname{Pic}}(P)$. *Bezeichnet p die Projektion von $P \times_{O_K} P'$ auf P und $\varphi \times \psi : X \to P \times_{O_K} P'$ den kanonischen Morphismus, so gilt:*

$$h_{\varphi\times\psi;p^*(\widehat{\mathscr{L}_0}),\ldots,p^*(\widehat{\mathscr{L}_t})} = h_{\varphi;\widehat{\mathscr{L}_0},\ldots,\widehat{\mathscr{L}_t}}.$$

Beweis. Falls alle Metriken zulässig sind, kann man Lemma 6.3 mit $a = p$ anwenden. Für den allgemeinen Fall benutzt man das nachfolgende Lemma, in dem stärkere Bedingungen an den Morphismus a gestellt werden, die aber hier wegen der Künneth-Formel [GH, p. 104] erfüllt sind.

6.6 Lemma. *Gegeben sei ein Morphismus $a : Y' \to Y$ von arithmetischen Varietäten über O_K mit der Eigenschaft, daß nach Basiswechsel auf $\mathbb{C}$ a glatt ist und sowohl a_∞^* wie auch $(a_\infty)_*$ die harmonischen Formen wieder in harmonische Formen überführen. Für $\widehat{\mathscr{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathscr{L}_t} \in \widehat{\operatorname{Pic}}(Y)$ und $Z \in Z_t(Y')$ gilt dann:*

i) $a_*(\widehat{Z}) = \widehat{a_*(Z)}$;

ii) $h_{a^*(\widehat{\mathscr{L}_0}),\ldots,a^*(\widehat{\mathscr{L}_t})} = h_{a;\widehat{\mathscr{L}_0},\ldots,\widehat{\mathscr{L}_t}}$.

Beweis. Da a_∞ glatt ist, ist $a_*(\widehat{Z})$ in $\widehat{Z}_t(Y)$ wohldefiniert. Die Bedingungen an die Transformationen der harmonischen Formen implizieren sofort i), und ii) folgt aus i) mit Hilfe der arithmetischen Projektionsformel (1.7).

6.7 Im folgenden Satz müssen verfeinerte Chernklassoperationen gebraucht werden. Die erste Chernklasse eines Geradenbündels auf dem eigentlichen O_K-Schema X induziert eine Aktion auf $CH_{\text{fin}}(X)$, die den üblichen Rechenregeln genügt. Gegeben sei ein Geradenbündel $\mathcal{L}$ mit einem Isomorphismus $\vartheta : \mathcal{L}\,|_{X_K} \xrightarrow{\sim} O_{X_K}$. Das Urbild von 1 ist ein regulärer globaler Schnitt s von $\mathcal{L}\,|_{X_K}$. $E := (\mathcal{L}, \vartheta)$ induziert jetzt einen Homomorphismus $CH(X) \to CH_{\text{fin}}(X)$, $Z \mapsto E.Z$, durch die folgenden Vorschriften: Für einen horizontalen Primzyklus Z hat $s\,|_{Z_K}$ genau eine Fortsetzung zu einem regulären meromorphen Schnitt $\widetilde{s}$ von Z und man setzt $E.Z := \operatorname{div}(\widetilde{s})$. Für einen vertikalen Zyklus Z sei $E.Z := c_1(\mathcal{L}).Z$. Das Produkt $E.Z$ ist auch additiv in E und kommutiert mit der Aktion der ersten Chernklasse eines Geradenbündels. Gegeben seien jetzt zwei O_K-Morphismen $\varphi : X \to P$, $\psi : X \to P'$ und jeweils mit zulässigen Metriken versehene Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}_0, \ldots, \overline{\mathcal{L}}_t$ von $\overline{P}$ und $\overline{\mathcal{L}}'_0, \ldots, \overline{\mathcal{L}}'_t$ von $\overline{P}'$ so, daß es einen Isomorphismus

$$\theta_j : \psi^* \mathcal{L}'_j\,|_{X_K} \xrightarrow{\sim} \varphi^* \mathcal{L}_j\,|_{X_K} \qquad (0 \leq j \leq t)$$

gibt. Für jedes $j \in \{0, \ldots, t\}$ hat man ein Paar $E_j := \left(\psi^* \mathcal{L}'_j \otimes \varphi^* \mathcal{L}_j^{-1}, \vartheta_j\right)$ mit obigen Eigenschaften, wobei ϑ_j von θ_j induziert wird. Zur Vereinfachung werden von jetzt an $\psi^* \mathcal{L}'_j\,|_{X_K}$ und $\varphi^* \mathcal{L}_j\,|_{X_K}$ mit Hilfe von θ_j identifiziert. Der Quotient der Pullbackmetrik von $\overline{\mathcal{L}}'_j$ durch die Pullbackmetrik von $\overline{\mathcal{L}}_j$ ist eine positive Funktion ϱ_j auf X_∞.

6.8 Satz. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von* (6.7) *gilt für jeden Zyklus Z von X der relativen Dimension t:*

$$h_{\varphi;\overline{\mathcal{L}}_0,\ldots,\overline{\mathcal{L}}_t}(Z) - h_{\psi;\overline{\mathcal{L}}'_0,\ldots,\overline{\mathcal{L}}'_t}(Z) = A_{\varphi\psi} - G_{\varphi\psi}$$

mit

$$A_{\varphi\psi} := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{j=0}^{t} \int_{Z_\infty} c_1\left(\psi^* \overline{L}'_0\right) \wedge \ldots \wedge c_1\left(\psi^* \overline{L}'_{j-1}\right) \wedge \log \varrho_j$$
$$\wedge\, c_1(\varphi^* \overline{L}_{j+1}) \wedge \ldots \wedge c_1(\varphi^* \overline{L}_t)$$

und

$$G_{\varphi\psi} := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}$$
$$\times \sum_{j=0}^{t} \operatorname{Grad}\left(c_1(\psi^* \mathcal{L}'_0) \ldots c_1(\psi^* \mathcal{L}'_{j-1}).E_j.c_1(\varphi^* \mathcal{L}_{j+1}) \ldots c_1(\varphi^* \mathcal{L}_t).Z\right).$$

Beweis. Falls μ ein Morphismus ist, welcher die analogen Bedingungen wie ψ erfüllt, dann gilt

$$A_{\varphi\mu} = A_{\varphi\psi} + A_{\psi\mu}$$
$$G_{\varphi\mu} = G_{\varphi\psi} + G_{\psi\mu}\,.$$

Dies folgt aus einer einfachen Rechnung, welche den Satz von Stokes (bzw. die Kommutativität der Schnittoperationen) benutzt. Daher sind beide Seiten der zu beweisenden Formel additiv. Damit läßt sich die Ausgangslage in der folgenden Weise systematisch vereinfachen: Durch Ersetzen von φ und ψ durch $\varphi \times \psi$ darf man zunächst dank der Additivität und wegen Korollar 6.5 annehmen, daß $P = P'$ und $\varphi = \psi$ ist. Da jedes Geradenbündel von P sich nach einem Satz von Serre [Ha, II.5.17] als „Differenz" von zwei basispunktfreien schreiben läßt, kann man durch synchrone Wahl dieser „Differenzen" und durch Ausnutzung der Multilinearität weiter erreichen, daß alle $\mathscr{L}_j$ und $\mathscr{L}_j'$ basispunktfrei sind. Wir lassen die Bedingung $\varphi = \psi$ vorerst fallen und dürfen wegen der Additivität den Morphismus ψ so wählen, daß ψ^* die globalen Schnitte von $\mathscr{L}_j'$ surjektiv auf die globalen Schnitte von $\psi^* \mathscr{L}_j'$ abbildet. Die Konstruktion von ψ geschieht mit Hilfe von [Ha, II.7.1], indem man für P' einen geeigneten multiprojektiven Raum wählt. Mit dem gleichen Argument wie anfangs darf man wieder $P = P'$ und $\varphi = \psi$ annehmen. Dank der Additivität ist es jetzt schließlich erlaubt, die Behauptung in $t + 1$ Schritten zu beweisen und pro Schritt nur ein Geradenbündel zu ändern. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir also $\overline{\mathscr{L}}_j = \overline{\mathscr{L}}_j'$ für alle $j \in \{0, \ldots, t-1\}$ voraus. Nach Proposition 6.2 gilt die Behauptung für alle vertikalen Zyklen, so daß wir im folgenden für Z einen horizontalen Primzyklus nehmen können. Indem man X durch Z ersetzt, darf man annehmen, daß $Z = X$ ist. Es existiert ein globaler Schnitt s von $\mathscr{L}_t$, der auf $\varphi(Z)$ nicht identisch verschwindet. Wenn man s durch ein geeignetes von Null verschiedenes ganzzahliges Vielfaches ersetzt, dann existiert ein globaler Schnitt s' von $\mathscr{L}_t'$ so, daß $\varphi^*(s')$ und $\varphi^*(s)$ auf der generischen Faser übereinstimmen. Aus (6.7) folgt

$$E_t.Z = \operatorname{div}\left(\varphi^*(s')\right) - \operatorname{div}\left(\varphi^*(s)\right).$$

Die Proposition 4.3 zeigt, daß

$$\begin{aligned} h_{\varphi;\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t}(Z) &= h_{\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_{t-1}}(\operatorname{div}(s).\varphi_*(Z)) \\ &\quad - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \int_{\varphi_*(Z)_\infty} \log \|s\| c_1(\bar{L}_0) \wedge \ldots \wedge c_1(\bar{L}_{t-1}) \end{aligned}$$

gilt. Wendet man beim Integral die Transformationsformel an und ersetzt s durch s', so erhält man dafür

$$\int_{Z_\infty} (\varphi^*(\log \|s'\|) - \log \varrho_t) c_1(\varphi^* \bar{L}_0) \wedge \ldots \wedge c_1(\varphi^* \bar{L}_{t-1}).$$

Substituiert man in $h_{\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_{t-1}}(\operatorname{div}(s).\varphi_*(Z))$ ebenfalls s durch s' mit Hilfe der Projektionsformel, so ergibt sich mit Proposition 6.2

$$h_{\varphi;\overline{\mathscr{L}}_0',\ldots,\overline{\mathscr{L}}_{t-1}'}(\operatorname{div}(\varphi^*(s'))) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \operatorname{Grad}(c_1(\varphi^* \mathscr{L}_0) \ldots c_1(\varphi^* \mathscr{L}_{t-1}).E_t.Z).$$

Außer der Substitution machen wir jetzt alle Umformungen rückgängig mit s' anstelle von s und erhalten für $h_{\varphi;\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t}(Z)$ insgesamt

$$\begin{aligned} &h_{\varphi;\overline{\mathscr{L}}_0',\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t'}(Z) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \operatorname{Grad}(c_1(\varphi^* \mathscr{L}_0) \ldots c_1(\varphi^* \mathscr{L}_{t-1}).E_t.Z) \\ &+ \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \int_{Z_\infty} \log \varrho_t \, c_1(\varphi^* \bar{L}_0) \wedge \ldots \wedge c_1(\varphi^* \bar{L}_{t-1}). \end{aligned}$$

Dies ist nichts anderes als die Behauptung.

6.9 Für multiprojektive Räume $\overline{P}$ und $\overline{P}'$ (wie in (4.4)) ist es nun das Ziel, die rechte Seite der Formel in Satz 6.8 abzuschätzen. Dabei ist es sinnvoll, alle $\mathcal{L}_j$ und $\mathcal{L}_j'$ als basispunktfrei und Z als horizontalen Primzyklus vorauszusetzen (vgl. (6.1) und (6.2)). Weiter darf man annehmen, daß X integral (und horizontal) ist (z.B. $X = Z$). Somit ist $E_j.X$ ein Cartierdivisor, der ebenfalls mit E_j bezeichnet werden soll. Die in (6.7) eingeführte Aktion entspricht dann dem Schnittprodukt mit E_j. Weiter dürfen wir annehmen, daß alle E_j effektiv sind, indem wir θ_j durch eine geeignetes ganzzahliges Vielfaches ersetzen. Dabei ändert sich natürlich auch ϱ_j. Sei πE_j das schematische Bild [EGA I, 6.10] von E_j unter π, dann gilt die Ungleichung $E_j \leq \pi^*(\pi E_j)$ von Cartierdivisoren. Das folgende Korollar gibt Auskunft, wie stark die Höhe bestimmt ist durch die Isomorphieklassen $\mathcal{M}_j \in \mathrm{Pic}(X_K)$ von $\varphi^* \mathcal{L}_j|_{X_K} = \psi^* \mathcal{L}_j'|_{X_K}$.

6.10 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von* (6.7) *und* (6.9) *gilt*

$$\sum_{j=0}^{t} \left(\min_{z \in Z_\infty} \log \varrho_j(z) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \mathrm{Grad}(\pi E_j) \right) d_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_{j-1},\mathcal{M}_{j+1},\ldots,\mathcal{M}_t}(Z_K)$$
$$\leq h_{\varphi;\overline{\mathcal{L}}_0,\ldots,\overline{\mathcal{L}}_t}(Z) - h_{\psi;\overline{\mathcal{L}}_0',\ldots,\overline{\mathcal{L}}_t'}(Z)$$
$$\leq \sum_{j=0}^{t} \max_{z \in Z_\infty} \log \varrho_j(z)\, d_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_{j-1},\mathcal{M}_{j+1},\ldots,\mathcal{M}_t}(Z_K).$$

Beweis. Wegen der Zulässigkeit der Metriken ist die Einschränkung von

$$c_1(\psi^* \overline{L}_0') \wedge \ldots \wedge c_1(\psi^* \overline{L}_{j-1}') \wedge c_1(\varphi^* \overline{L}_{j+1}) \wedge \ldots \wedge c_1(\varphi^* \overline{L}_t)$$

auf Z_∞ gleich dem Produkt der Volumenform von Z_∞ mit einer nichtnegativen Funktion und deshalb gilt mit (3.6):

$$[K:\mathbb{Q}] \min_{z \in Z_\infty} \log \varrho_j(z)\, d_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_{j-1},\mathcal{M}_{j+1},\ldots,\mathcal{M}_t}(Z_K)$$
$$\leq \int_{Z_\infty} c_1(\psi^* \overline{L}_0') \wedge \ldots \wedge c_1(\psi^* \overline{L}_{j-1}') \wedge \log(\varrho_j) \wedge c_1(\varphi^* \overline{L}_{j+1}) \wedge \ldots \wedge c_1(\varphi^* \overline{L}_t)$$
$$\leq [K:\mathbb{Q}] \max_{z \in Z_\infty} \log \varrho_j(z)\, d_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_{j-1},\mathcal{M}_{j+1},\ldots,\mathcal{M}_t}(Z_K).$$

Da alle $\mathcal{L}_j$ und $\mathcal{L}_j'$ von globalen Schnitten erzeugt werden und E_j effektiv ist, gilt die Ungleichung

$$0 \leq \pi_*(c_1(\psi^* \mathcal{L}_0') \ldots c_1(\psi^* \mathcal{L}_{j-1}').E_j.c_1(\varphi^* \mathcal{L}_{j+1}) \ldots c_1(\varphi^* \mathcal{L}_t).Z)$$

für Divisoren der Kodimension 1 von $\mathrm{Spec}(O_K)$. Aufgrund von (6.9) ist die rechte Seite kleiner oder gleich

$$\pi_*(c_1(\psi^* \mathcal{L}_0') \ldots c_1(\psi^* \mathcal{L}_{j-1}').\pi^*(\pi E_j).c_1(\varphi^* \mathcal{L}_{j+1}) \ldots c_1(\varphi^* \mathcal{L}_t).Z)$$

und mit der Projektionsformel erhält man

$$d_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_{j-1},\mathcal{M}_{j+1},\ldots,\mathcal{M}_t}(Z_K)\pi E_j.$$

Mit (6.8) folgt jetzt die Behauptung.

7 Die Höhenmaschine

Gegeben sei ein eigentliches Schema X über $R \in \{K, O_K\}$, wobei K ein Zahlkörper ist.

7.1 S sei eine Menge und $\delta \in (\mathbb{R}^+)^S$. Es sei folgendermaßen eine Äquivalenzrelation $\equiv_\delta$ auf $\mathbb{R}^S$ definiert: $f \equiv g \bmod \delta :\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}^+$ mit $|f-g| \le C \cdot \delta$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Pic}_b(X)$ die Menge der Isomorphieklassen der invertierbaren Garben auf X, die von globalen Schnitten erzeugt werden. $\mathrm{Pic}_b(X)$ ist ein kommutatives Monoid. Falls $\overline{P}$ eine Arakelov-Varietät ist, dann soll $\mathrm{Pic}_b\left(\overline{P}\right)$ das Urbild von $\mathrm{Pic}_b(P)$ in der in 1.8 definierten Gruppe $\mathrm{Pic}\left(\overline{P}\right)$ sein.

Für $Z = \sum\limits_{Z_i \text{ prim}} n_i Z_i \in Z_t(X)$ setzen wir $|Z| := \sum\limits_i |n_i| Z_i$ und für $\mathscr{L}_0, \ldots, \mathscr{L}_t \in \mathrm{Pic}_b(X)$

$$\delta_{\mathscr{L}_0,\ldots,\mathscr{L}_t}(Z) := \sum_{i=0}^{t} d_{\mathscr{L}_0,\ldots,\mathscr{L}_{i-1},\mathscr{L}_{i+1},\ldots,\mathscr{L}_t}(|Z|).$$

Offensichtlich gilt dann

$$\delta_{\mathscr{M}\otimes\mathscr{N},\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_t}(Z) \le \delta_{\mathscr{M},\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_t}(Z) + \delta_{\mathscr{N},\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_t}(Z);$$

ferner ändert sich $\delta_{\mathscr{L}_0,\ldots,\mathscr{L}_t}$ nicht, wenn die $\mathscr{L}_0, \ldots, \mathscr{L}_t$ permutiert werden.
Gegeben seien $t \in \{-1, 0, \ldots, \dim X\}$ und $\mathscr{M}_0, \ldots, \mathscr{M}_t \in \mathrm{Pic}_b(X)$. Unter einer projektiven Realisierung $(\varphi; \overline{\mathscr{L}}_0, \ldots, \overline{\mathscr{L}}_t)$ von $\mathscr{M}_0, \ldots, \mathscr{M}_t$ versteht man einen R-Morphismus φ von X in einen wie in (4.4) gegebenen multiprojektiven Raum $\overline{P}$ über O_K und Elemente $\overline{\mathscr{L}}_0, \ldots, \overline{\mathscr{L}}_t$ von $\mathrm{Pic}_b\left(\overline{P}\right)$ so, daß für alle $j \in \{0, \ldots, t\}$ die Isomorphieklasse von $\varphi^* \mathscr{L}_j$ gleich $\mathscr{M}_j$ ist.

7.2 Satz. *Sind* $(\varphi; \overline{\mathscr{L}}_0, \ldots, \overline{\mathscr{L}}_t)$ *und* $(\psi; \overline{\mathscr{L}}'_0, \ldots, \overline{\mathscr{L}}'_t)$ *projektive Realisierungen von* $\mathscr{M}_0, \ldots, \mathscr{M}_t$, *so gilt*

$$h_{\varphi;\overline{\mathscr{L}}_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}_t} \equiv h'_{\psi;\overline{\mathscr{L}}'_0,\ldots,\overline{\mathscr{L}}'_t} \bmod \delta_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}.$$

Beweis. Da im Fall $R = O_K$ die Behauptung sofort aus (6.10) folgt, darf man annehmen, daß $R = K$ ist. Wegen der Dreiecksungleichung ist es erlaubt ψ frei zu wählen, solange die Wahl nur von $\mathscr{M}_0, \ldots, \mathscr{M}_t$ abhängt. Daher sei $\psi := \psi_0 \times \cdots \times \psi_t$ ein Morphismus von X in den multiprojektiven Raum

$$P' := \mathbb{P}^{m_0}_{O_K} \times_{O_K} \cdots \times_{O_K} \mathbb{P}^{m_t}_{O_K}$$

so, daß $\overline{\mathscr{L}}'_j = \overline{\mathscr{O}}_{P'}(e_j)$ gilt und ψ^* für alle $j \in \{0, \ldots, t\}$ die globalen Schnitte von $\mathscr{L}'_j$ surjectiv auf die globalen Schnitte von $\psi^* \mathscr{L}'_j$ abbildet [Ha, II.7.1]. Mit Hilfe der Tupel- und der Segre-Einbettung [Ha, Ex. I.2.12, bzw. Ex. I.2.14] läßt sich weiter ein Morphismus

$$\phi : P \to P'' := \mathbb{P}^{n_0}_{O_K} \times_{O_K} \cdots \times_{O_K} \mathbb{P}^{n_t}_{O_K}$$

finden so, daß für alle $j \in \{0, \ldots, t\}$ die Isometrieklasse von $\phi^* \overline{\mathscr{O}}(e_j)$ gleich $\overline{\mathscr{L}}_j$ ist. Nach Lemma 6.3 darf man dann annehmen, daß $P = P''$ und ϕ die Identität ist. Es existiert ein Morphismus $a : \psi(X) \to P_K$ mit $\varphi = a \circ \psi$ und $a^* \mathscr{O}_{P_K}(e_j) \cong \mathscr{O}_{P'_K}(e_j)\,|_{\psi(X)}$, welcher für alle $j \in \{0, \ldots, t\}$ durch globale Schnitte von $\mathscr{O}_{P'}(e_j)$ induziert wird [Ha, II.7.1]. Dieser besitzt eine rationale Fortsetzung auf

$\overline{\psi(X)} \subseteq P'$, wel- che durch ein Produkt von Aufblasungen zu einem Morphismus gemacht werden kann [Ha, II.7.17.3]. Es gibt also ein eigentliches Schema Y über O_K und zwei über O_K definierte Morphismen $q : Y \to \overline{\psi(X)}$, $\widetilde{a} : Y \to P$ mit $\widetilde{a} = a \circ q$ auf den Definitionsbereich von $a \circ q$. Ferner können wir erreichen, daß q birational ist und die Einschränkung von q auf Y_K einen Isomorphismus auf $\psi(X)$ induzieren soll. Ist Z ein Primzyklus von X der relativen Dimension t mit $Z' := (q_K^{-1} \circ \psi)_*(Z)$, so gilt

$$h_{\varphi;\overline{\mathcal{L}}_0,\ldots,\overline{\mathcal{L}}_t}(Z) = h_{\widetilde{a};\overline{\mathcal{L}}_0,\ldots,\overline{\mathcal{L}}_t}(\overline{Z'})$$

und

$$h_{\psi;\overline{\mathcal{L}}'_0,\ldots,\overline{\mathcal{L}}'_t}(Z) = h_{q;\overline{\mathcal{L}}'_0,\ldots,\overline{\mathcal{L}}'_t}(\overline{Z'})\,.$$

Zusammen mit der Projektionsformel folgt die Behauptung aus (6.10).

7.3 Satz *(Höhenmaschine). Zu jedem $t+1$ Tupel $(\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_t) \in \mathrm{Pic}_b(X)^{t+1}$ gibt es genau eine Äquivalenzklasse $h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} \in \mathbb{R}^{Z_t(X)}/\equiv_{\delta_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) $h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} \equiv h_{\varphi;\overline{\mathcal{L}}_0,\ldots,\overline{\mathcal{L}}_t} \bmod \delta_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t}$ *für jede projektive Realisierung von* $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_t$.

ii) $h_{\mathcal{K}\otimes\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} \equiv h_{\mathcal{K},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} + h_{\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} \bmod \delta_{\mathcal{K}\otimes\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t}$.

Beweis. Nach Satz 7.2 dient i) als Definition von $h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t}$. Es gilt

$$\delta_{\mathcal{K}\otimes\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} \le \delta_{\mathcal{K},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} + \delta_{\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} \le 2\delta_{\mathcal{K}\otimes\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t}$$

und damit sind beide Seiten von ii) $\bmod \delta_{\mathcal{K}\otimes\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t}$ definiert. Weiter existieren Morphismen

$$\varphi : X \to \mathbb{P}^k, \quad \psi : X \to \mathbb{P}^l \quad \text{und} \quad \varphi_i : X \to \mathbb{P}^{n_i} \quad (1 \le i \le t)$$

mit

$$\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1) \cong \mathcal{K}, \quad \psi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(1) \cong \mathcal{L} \quad \text{und} \quad \varphi_i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n_i}}(1) \cong \mathcal{M}_i \quad (1 \le i \le t)\,.$$

Wegen Satz 7.2 folgt

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{K}\otimes\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} &\equiv h_{\varphi\times\psi\times\varphi_1\times\cdots\times\varphi_t;\mathcal{O}(e_0)\otimes\mathcal{O}(e_1),\mathcal{O}(e_2),\ldots,\mathcal{O}(e_{t+1})} \bmod \delta_{\mathcal{K}\otimes\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} \\ &= h_{\varphi\times\psi\times\varphi_1\times\cdots\times\varphi_t;\mathcal{O}(e_0),\mathcal{O}(e_2),\ldots,\mathcal{O}(e_{t+1})} \\ &\quad + h_{\varphi\times\psi\times\varphi_1\times\cdots\times\varphi_t,\mathcal{O}(e_1),\ldots,\mathcal{O}(e_{t+1})} \\ &\equiv h_{\mathcal{K},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} + h_{\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} \bmod \delta_{\mathcal{K}\otimes\mathcal{L},\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_t} \end{aligned}$$

und damit ergibt sich die Behauptung.

7.4 Korollar. *Die Höhe besitzt die folgenden Eigenschaften:*

i) *h ist symmetrisch, d.h. die Klasse von $h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t}$ in $\mathbb{R}^{Z_t(X)}/\equiv_{\delta_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t}}$ ändert sich nicht, wenn $(\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_t)$ permutiert wird.*

ii) *Falls $f : X' \to X$ ein Morphismus zwischen vollständigen R-Schemata ist, dann gilt*

$$h_{f^*\mathcal{M}_0,\ldots,f^*\mathcal{M}_t} \equiv h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} \circ f_* \bmod \delta_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} \circ f_*\,.$$

Beweis. Die Aussage i) ist trivial. Es gilt aufgrund der Projektionsformel $\delta_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} \circ f_* = \delta_{f^*\mathcal{M}_0,\ldots,f^*\mathcal{M}_t}$. Für eine projektive Realisierung $(\varphi; \overline{\mathcal{Y}}_0, \ldots, \overline{\mathcal{Y}}_t)$ folgt

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} &\equiv h_{\varphi\circ f;\overline{\mathcal{Y}}_0,\ldots,\overline{\mathcal{Y}}_t} = h_{\varphi;\overline{\mathcal{Y}}_0,\ldots,\overline{\mathcal{Y}}_t} \circ f_* \\ &\equiv h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} \circ f_* \operatorname{mod} \delta_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} \circ f_* . \end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Behauptung gezeigt.

Im folgenden Satz sei X ein projektives Schema über R und $\mathcal{O}_X(1)$ eine sehr ample invertierbare Garbe. Ferner soll δ den Grad bezüglich $\mathcal{O}_X(1)$ messen, d.h. $\delta := d_{\mathcal{O}_X(1),\ldots,\mathcal{O}_X(1)}$ mit t Indizes.

7.5 Satz. *Die Äquivalenzrelation $\equiv_\delta$ ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{O}_X(1)$. Für $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_t \in \mathrm{Pic}_b(X)$ gilt $\delta_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} = O(\delta)$ und deshalb induziert die Höhe aus* (7.3) *eine Abbildung von $\mathrm{Pic}_b(X)^{t+1}$ nach $\mathbb{R}^{Z_t(X)}/\equiv_\delta$. Es existiert genau eine multilineare Fortsetzung dieser Abbildung auf $\mathrm{Pic}(X)^{t+1}$. Sie wird wieder mit h bezeichnet.*

Beweis. Der Beweis stützt sich auf einen Satz von Serre, der besagt, daß es für jede invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß für alle $n \geq n_0$ die Garbe $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(n)$ von globalen Schnitten erzeugt wird [Ha, II.5.17]. Damit läßt sich $\mathcal{L}$ als „Differenz" von zwei Elementen aus $\mathrm{Pic}_b(X)$ schreiben. Seien nun $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_t$ Elemente aus $\mathrm{Pic}_b(X)$, dann existiert demzufolge ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\mathcal{M}_i^{-1} \otimes \mathcal{O}_X(n) \in \mathrm{Pic}_b(X)$ für alle $i \in \{0, \ldots, t\}$ gilt. Es ergibt sich sofort $\delta_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} \leq (t+1)n^t\delta$ und damit auch die Unabhängigkeit der Äquivalenzrelation $\equiv_\delta$ von der Wahl von $\mathcal{O}_X(1)$.

Induktiv konstruiert man die Höhe für beliebige Geradenbündel: Wir nehmen an, daß $h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t}$ schon konstruiert worden ist für $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_{k-1} \in \mathrm{Pic}(X)$ und $\mathcal{M}_k, \ldots, \mathcal{M}_t \in \mathrm{Pic}_b(X)$. Ferner soll die Multilinearität in dieser Situation bekannt sein. Dies folgt im Fall $k = 0$ aus Satz 7.3. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es also die Höhe $h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t}$ festzulegen und die Multilinearität zu beweisen, wenn wir die Bedingung $\mathcal{M}_k \in \mathrm{Pic}_b(X)$ fallenlassen. Sei also $\mathcal{M}_k \in \mathrm{Pic}(X)$ und die anderen $\mathcal{M}_j$ wie vorhin. Nach dem zu Beginn zitierten Satz von Serre existieren $\mathcal{K}_k, \mathcal{L}_k \in \mathrm{Pic}_b(X)$ mit $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{K}_k \otimes \mathcal{L}_k^{-1}$. Dies legt folgende Definition nahe:

$$h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} := h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{K}_k,\ldots,\mathcal{M}_t} - h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{L}_k,\ldots,\mathcal{M}_t} .$$

Falls $\mathcal{M}_k \cong \mathcal{K}_k' \otimes \mathcal{L}_k'^{-1}$ eine zweite Darstellung von $\mathcal{M}_k$ als „Differenz" von zwei Elementen $\mathcal{K}_k'$ und $\mathcal{M}_k'$ ist, dann folgt aus

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{K}_k,\ldots,\mathcal{M}_t} + h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{L}_k',\ldots,\mathcal{M}_t} &\equiv h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{K}_k\otimes\mathcal{L}_k',\ldots,\mathcal{M}_t} \\ &\equiv h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{K}_k',\ldots,\mathcal{M}_t} + h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{L}_k,\ldots,\mathcal{M}_t} \operatorname{mod} \delta \end{aligned}$$

die Wohldefiniertheit von $h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t}$ in $\mathbb{R}^{Z_t(X)}/\equiv_\delta$. Die Multilinearität folgt sofort nach Induktion. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung wird aus der Konstruktion klar.

7.6 *Bemerkung.* Es folgt sofort, daß h symmetrisch ist. Sei $f : X' \to X$ ein Morphismus projektiver Schemata über R, dann gilt $h_{f^*\mathcal{M}_0,\ldots,f^*\mathcal{M}_t} \equiv h_{\mathcal{M}_0,\ldots,\mathcal{M}_t} \circ f_* \operatorname{mod} \delta'$.

Satz 7.2 ist falsch für nichtzulässige Metriken. Dies sieht man schon ein, wenn man $t = 0$ und $\mathcal{L}_0$ als triviales Bündel mit einer geeigneten nichtzulässigen Metrik wählt. Es gibt aber das schwächere Analogon für die Äquivalenzrelation $\equiv_\delta$, wie folgende Proposition zeigt.

7.7 Proposition. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie beim Satz 7.5 sei φ ein Morphismus von X in einen multiprojektiven Raum P und seien $\widehat{\mathcal{L}_0}, \ldots, \widehat{\mathcal{L}_t}$ Elemente aus $\widehat{\operatorname{Pic}}(P)$, dann liegt $h_{\varphi;\widehat{\mathcal{L}_0},\ldots,\widehat{\mathcal{L}_t}}$ in der Äquivalenzklasse von $h_{\varphi^*\mathcal{L}_0,\ldots,\varphi^*\mathcal{L}_t}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\equiv_\delta$.*

Beweis. Es darf angenommen werden, daß $X = P$ ist. Weiter sei $\mathcal{L}_0$ ein Geradenbündel mit zwei F_∞^*-invarianten Metriken, welche somit zwei Elemente $\widehat{\mathcal{L}_0}$ und $\widehat{\mathcal{L}_0'}$ in $\widehat{\operatorname{Pic}}(P)$ induzieren. Der Quotient der beiden Metriken ist eine positive glatte Funktion ϱ_0 und es gilt nach (1.6) für $Z \in Z_t(P)$

$$h_{\widehat{\mathcal{L}_0},\widehat{\mathcal{L}_1},\ldots,\widehat{\mathcal{L}_t}}(Z)-h_{\widehat{\mathcal{L}_0'},\widehat{\mathcal{L}_1},\ldots,\widehat{\mathcal{L}_t}}(Z) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\int\limits_{P_\infty} \log\varrho_0\, c_1(\widehat{L}_1)\wedge\ldots\wedge c_1(\widehat{L}_t)\wedge\omega(\widehat{Z})\,.$$

Da $\omega(\widehat{Z})$ der Fundamentalzyklus von Z ist, folgt mit (2.4) die Darstellung

$$\omega(\widehat{Z}) = \sum d_{k_0,\ldots,k_r}(Z) c_0^{n_0-k_0}\wedge\ldots\wedge c_r^{n_r-k_r}\,,$$

wobei die Summe über alle $(k_0,\ldots,k_r) \in \mathbb{N}^{r+1}$ mit $k_0+\cdots+k_r = t$ läuft und $d_{k_0,\ldots,k_r}(Z)$ der Grad von Z bezüglich den Geradenbündeln

$$\underbrace{\mathcal{O}(e_0),\ldots,\mathcal{O}(e_0)}_{k_0},\ldots,\underbrace{\mathcal{O}(e_r),\ldots,\mathcal{O}(e_r)}_{k_r}$$

ist. Wenn man im Integral $\omega(\widehat{Z})$ ersetzt und die Summe zusammen mit $d_{k_0,\ldots,k_r}(Z)$ vor das Integral nimmt, dann wird aus der zweiten Behauptung von Satz 7.5 klar, daß $h_{\widehat{\mathcal{L}_0'},\widehat{\mathcal{L}_1},\ldots,\widehat{\mathcal{L}_t}}$ äquivalent ist zu $h_{\widehat{\mathcal{L}_0},\widehat{\mathcal{L}_1},\ldots,\widehat{\mathcal{L}_t}}$ modulo δ. Die Behauptung folgt jetzt mit Hilfe der Symmetrie und dem Wechsel auf zulässige Metriken.

8 Die Néron-Tate Höhe

8.1 Es sei S eine Menge, auf der das Monoid $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ operiere. Weiter sei $\delta \in (\mathbb{R}^+)^S$ und es gebe eine reelle Zahl α mit $\delta(ns) \le n^\alpha\delta(s)$ für alle $s \in S$. Die Selbstabbildung von S, welche durch die Aktion von $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gegeben ist, wird im folgenden mit λ_n bezeichnet. Ein Element h aus $\mathbb{R}^S$ heißt δ-quasihomogen vom Grad β, falls $h\circ\lambda_n \equiv n^\beta h \bmod \delta$ bezüglich der in 7.1 eingeführten Äquivalenzrelation gilt für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

8.2 Hilfssatz. *Gilt $\alpha < \beta$ und $m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, so konvergiert für alle $s \in S$ die Folge $m^{-\beta\nu}h(m^\nu s)$, $\nu \in \mathbb{N}$, in den reellen Zahlen.*

Beweis. Für $\nu,\mu \in \mathbb{N}$ setzen wir $\Delta_{\nu,\mu} := \left|m^{-\beta(\mu+\nu)}h(m^{\mu+\nu}s) - m^{-\beta\nu}h(m^\nu s)\right|$. Da h δ-quasihomogen ist vom Grad β, gibt es eine Konstante $C_m > 0$ mit $\left|h\circ\lambda_m - m^\beta h\right| \le C_m\delta$. Damit hat man für $\mu \ge 1$

$$\left|h(m^{\mu+\nu}s) - m^\beta h(m^{\mu+\nu-1}s)\right| \le C_m m^{(\mu+\nu-1)\alpha}\delta(s).$$

Weiter gilt

$$\Delta_{\nu,\mu} \leq m^{-\beta(\mu+\nu)} \left| h\left(m^{\mu+\nu}s\right) - m^{\beta} h\left(m^{\mu+\nu-1}s\right)\right| + \Delta_{\nu,\mu-1} ;$$

zusammen ergibt sich die Ungleichung

$$\Delta_{\nu,\mu} \leq C_m m^{-\alpha} m^{(\alpha-\beta)(\mu+\nu)} \delta(s) + \Delta_{\nu,\mu-1} .$$

Summation ergibt

$$\Delta_{\nu,\mu} \leq C_m m^{-\beta} m^{(\alpha-\beta)\nu} \frac{1 - m^{(\alpha-\beta)\mu}}{1 - m^{(\alpha-\beta)}} \delta(s) \leq C_m \frac{m^{-\beta}}{1 - m^{\alpha-\beta}} m^{(\alpha-\beta)\nu} \delta(s)$$

und daraus folgt, daß die zu untersuchende Folge eine Cauchy-Folge ist, da $\alpha - \beta < 0$ vorausgesetzt war.

8.3 Hilfssatz. *Die Grenzfunktion $\widehat{h}$ ist die einzige homogene Funktion aus $\mathbb{R}^S$ vom Grad β mit $\widehat{h} \equiv h \bmod \delta$. Insbesondere ist $\widehat{h}$ unabhängig von m.*

Beweis. Aus dem Beweis von (8.2) folgt die Existenz einer von μ unabhängigen Konstanten C'_m mit $\Delta_{0,\mu} \leq C'_m \delta(s)$. Daher gilt

$$\left|\widehat{h}(s) - h(s)\right| = \lim_{\mu \to \infty} \Delta_{0,\mu} \leq C'_m \delta(s)$$

und das bedeutet $\widehat{h} \equiv h \bmod \delta$. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$\widehat{h}(ns) = \lim_{\nu \to \infty} m^{-\beta\nu} \left\{ n^{\beta} h\left(m^{\nu}s\right) + h\left(nm^{\nu}s\right) - n^{\beta} h\left(m^{\nu}s\right)\right\} .$$

Die Ungleichungen

$$\left|h\left(nm^{\nu}s\right) - n^{\beta} h\left(m^{\nu}s\right)\right| \leq C_n \delta\left(m^{\nu}s\right) \leq C_n m^{\alpha\nu} \delta(s)$$

und $\alpha < \beta$ führen somit auf $\widehat{h}(nz) = n^{\beta}\widehat{h}(s)$. Damit ist die Homogenität gezeigt.

Sei $\widetilde{h}$ ebenfalls eine homogene Funktion vom Grad β, welche äquivalent zu h ist. Da die Konstante C aus der Rechnung

$$\begin{aligned} n^{\beta}\left|\widehat{h}(s) - \widetilde{h}(s)\right| &= \left|\widehat{h}(ns) - \widetilde{h}(ns)\right| \\ &\leq \left|\widehat{h}(ns) - h(ns)\right| + \left|h(ns) - \widetilde{h}(ns)\right| \leq C n^{\alpha} \delta(s) \end{aligned}$$

nicht von n abhängt, folgt $\widehat{h}(s) = \widetilde{h}(s)$ nach Übergang $n \to \infty$. Dies beweist die Eindeutigkeit.

8.4 *Bemerkung.* (8.2) und (8.3) bleiben richtig, wenn man nur $\delta \circ \lambda_n \leq C n^{\alpha} \delta$ (C unabhängig von n) fordert.

8.5 Das obige wird nun auf eine abelsche Varietät A über K angewendet. Dazu sei S die Menge $Z_t(A)$ und die Aktion $\mathbb{N} \setminus \{0\} \times S \to S$ sei gegeben durch $(n, Z) \mapsto [n]_* Z$, wobei $[n] : A \to A$ die Multiplikation mit n bedeuten soll. Die Abbildung $[n]$ ist für alle $n \in \mathbb{Z}$ definiert. Für symmetrische $\mathscr{M}_0, \ldots, \mathscr{M}_t \in \mathrm{Pic}_b(A)$ gilt

$$\begin{aligned} \delta_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}([n]_* Z) &= \sum_{i=0}^{t} d_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_{i-1},\mathscr{M}_{i+1},\ldots,\mathscr{M}_t}(|[n]_* Z|) \\ &\leq \sum_{i=0}^{t} d_{\mathscr{M}_0^{n^2},\ldots,\mathscr{M}_{i-1}^{n^2},\mathscr{M}_{i+1}^{n^2},\ldots,\mathscr{M}_t^{n^2}}(|Z|) \end{aligned}$$

und deshalb gilt zusammen mit Mumford's Formel [La, Lemma 5.2.6] für $\alpha := 2t$

$$\delta_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t}([n]_*Z) \le n^\alpha \delta_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t}(Z).$$

Aus (7.3) und (7.4) folgt

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t}([n]_*Z) &\equiv h_{\mathcal{M}_0^{n^2},\dots,\mathcal{M}_t^{n^2}}(Z) \\ &\equiv n^{2(t+1)} h_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t}(Z) \bmod \delta_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t}(Z), \end{aligned}$$

und damit ist $\beta = 2t + 2$. Die Vorbetrachtungen dieses Abschnittes zeigen, daß es genau eine Funktion $\widehat{h}_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t} \in \mathbb{R}^{Z_t(A)}$ gibt mit

$$\widehat{h}_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t} \circ [n]_* = n^{2t+2}\widehat{h}_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t}$$

und

$$\widehat{h}_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t} \equiv h_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t} \bmod \delta_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

8.6 Satz. *Es existiert genau eine multilineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \widehat{h} : \{\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(A) \mid \mathcal{M} \text{ symmetrisch}\}^{t+1} \\ \to \left\{ f \in \mathbb{R}^{Z_t(A)} \mid \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \circ [n]_* = n^{2t+2} f \right\} \end{aligned}$$

mit $\widehat{h}_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t} \equiv h_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t} \bmod \delta_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t}$ *für alle geraden Elemente* $\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t$ *aus* $\mathrm{Pic}_b(A)$.

Beweis. $H := \{\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(A) \mid \mathcal{M} \text{ gerade}\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Pic}(A)$. Da A projektiv ist, gibt es ein sehr amples $\mathcal{H}' \in \mathrm{Pic}(A)$. $\mathcal{H} := \mathcal{H}' \otimes (-1)^*\mathcal{H}'$ ist gerade und sehr ampel [Ha, Ex. II.7.5d]. Aus (8.5) wird klar, daß die dort konstruierte Funktion der einzige Kandidat für die Einschränkung der gesuchten Abbildung auf $(\mathrm{Pic}_b(A) \cap H)^{t+1}$ ist. Für Elemente $\mathcal{B}_0,\dots,\mathcal{B}_t,\mathcal{B}_0'$ aus $\mathrm{Pic}_b(A) \cap H$ gilt wegen Satz 7.3

$$\widehat{h}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_t} + \widehat{h}_{\mathcal{B}_0',\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_t} \equiv h_{\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_0',\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_t} \bmod \delta_{\mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_0',\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_t}$$

und die linke Seite ist homogen vom Grad $2t + 2$. Dies zeigt, daß $\widehat{h}$ eine multilineare Abbildung von $(\mathrm{Pic}_b(A) \cap H)^{t+1}$ nach $\mathbb{R}^{Z_t(A)}$ ist. Zu jedem $\mathcal{M} \in H$ existiert eine natürliche Zahl m mit $\mathcal{M} \otimes \mathcal{H}^m \in \mathrm{Pic}_b(A) \cap H$. Somit läßt sich jedes Element von H als „Differenz" von zwei Elementen aus $\mathrm{Pic}_b(A) \cap H$ schreiben. Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz 7.5 folgt die Existenz und die Eindeutigkeit der Fortsetzung von $\widehat{h}$ auf H^{t+1}.

8.7 Definition. Die Höhe $\widehat{h}$ heißt Néron-Tate Höhe.

8.8 Korollar. *Für einen Homomorphismus* $\varphi : A' \to A$ *abelscher Varietäten über* K *und Elemente* $\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t$ *aus* H *gilt*

$$\widehat{h}_{\varphi^*\mathcal{M}_0,\dots,\varphi^*\mathcal{M}_t} = \widehat{h}_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t} \circ \varphi_*.$$

Insbesondere ist $\widehat{h}_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t}$ *homogen vom Grad* $2t + 2$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Es gilt

$$\widehat{h}_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t} \circ \varphi_* \circ [n]_* = \widehat{h}_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t} \circ [n]_* \circ \varphi_* = n^{2t+2}\,\widehat{h}_{\mathcal{M}_0,\dots,\mathcal{M}_t} \circ \varphi_*$$

und falls alle $\mathscr{M}_j$ basispunktfrei sind, so hat man nach (7.4)

$$\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t} \circ \varphi_* \equiv \widehat{h}_{\varphi^*\mathscr{M}_0,\ldots,\varphi^*\mathscr{M}_t} \bmod \delta_{\varphi^*\mathscr{M}_0,\ldots,\varphi^*\mathscr{M}_t}.$$

Die Behauptung folgt jetzt aus (8.5) und (8.6).

8.9 *Bemerkung*. Nach Proposition 5.3 und nach Konstruktion darf man die Néron-Tate Höhe $\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}$ bezüglich $\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t \in H$ ansehen als reelle Funktion auf $Z_t(A_{\overline{\mathbb{Q}}})$. Deshalb kann man auch annehmen, daß die abelschen Varietäten über dem algebraischen Abschluß $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert sind.
Mit den genau gleichen Argumenten läßt sich $\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}$ einführen, wenn ein Geradenbündel ungerade und alle anderen symmetrisch sind. Die Néron-Tate Höhe ist dann homogen vom Grad $2t+1$. Zusammengefaßt erhält man also eine Néron-Tate Höhe $\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}$, wenn man t Geradenbündel aus H wählt. Dabei bleibt die Funktorialität (8.8) gültig. Für $t=0$, $\mathscr{M} \in \mathrm{Pic}(A)$ und $x \in A(\overline{\mathbb{Q}})$ folgt direkt aus der Konstruktion, daß $\widehat{h}_{\mathscr{M}}(x)$ gleich der in der Einleitung erwähnten Néron-Tate Höhe des Punktes x bezüglich $\mathscr{M}$ [La, Theorem 5.3.1] ist.
Gegeben sei jetzt eine abelsche Varietät über $\overline{\mathbb{Q}}$ und ein t dimensionaler Primzyklus Z von A. Der Stabilisator von Z wird mit Stab(Z) bezeichnet.

8.10 Proposition. *Für symmetrische Elemente* $\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t$ *aus* $\mathrm{Pic}(A)$ *und* $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *gelten die folgenden Eigenschaften:*

a) $[m]_*Z = |\mathrm{Ker}[m] \cap \mathrm{Stab}(Z)|\, Z$;

b) $\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}([m]Z) = |\mathrm{Ker}[m] \cap \mathrm{Stab}(Z)|^{-1} m^{2t+2}\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}(Z)$;

c) $\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}([m]^*Z) = m^{2(\dim A-t-1)}\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}(Z)$;

d) *ist* $x \in A(\overline{\mathbb{Q}})$ *ein Torsionspunkt, so folgt* $\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}(Z+x) = \widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}(Z)$;

e) *es gilt* $\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}(Z) = 0$, *falls Z ein Translat einer abelschen Untervarietät mit einem Torsionspunkt ist.*

8.11 *Bemerkung*. Philippon [Ph2, Proposition 9] hat diese Eigenschaften bewiesen für die in seiner Arbeit eingeführte kanonische Höhe $\widehat{h}_{\mathscr{L}}$, wobei $\mathscr{L}$ ein sehr amples symmetrisches Geradenbündel ist mit dessen Hilfe man A als projektiv normale Untervarietät von $\mathbb{P}^n$ einbetten kann. In dieser Proposition hat er auch gezeigt, daß $\widehat{h}_{\mathscr{L}}$ durch b) und durch die Äquivalenz zu seiner vorher definierten Höhe charakterisiert wird. Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, ist letztere Höhe äquivalent zu $h_{\mathscr{L},\ldots,\mathscr{L}}$ [Sol, Théorème 3] und deshalb muß die kanonische Höhe $\widehat{h}_{\mathscr{L}}$ gleich der Néron-Tate Höhe aus dieser Arbeit sein.

Beweis von (8.10). Mit Mumford's Formel [La, Lemma 5.2.6] und einem Resultat von Hindry [Hi, Lemma 6] folgt a). Aus (8.8) und a) erhält man b). $[m]$ ist eine Isogenie vom Grad $m^{2\dim A}$ und damit surjektiv, endlich und flach [Mi, 8.1, 8.2]. Aus $[m]_*[m]^*Z = m^{2\dim A}Z$ [Fu, 1.7.4] und (8.8) folgt

$$\begin{aligned}\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}(Z) &= m^{-2\dim A}\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}([m]_*[m]^*Z)\\ &= m^{2(t+1-\dim A)}\widehat{h}_{\mathscr{M}_0,\ldots,\mathscr{M}_t}([m]^*Z).\end{aligned}$$

Wenn x ein m-Torsionspunkt ist, dann gilt $[m]_*(Z+x) = [m]_*Z$, und der Punkt d) ergibt sich somit aus der Homogenität (8.8). In e) darf man wegen d) annehmen, daß Z eine abelsche Untervarietät ist, und aus b) folgt dann e).

Danksagung. Herzlich danken möchte ich G. Wüstholz für die Unterstützung während meiner ganzen Arbeit, J. Kramer für die Hilfe bei der Korrektur und Gestaltung, sowie S. Winiger für das sorgfältige Tippen einer ersten Fassung. Zu erwähnen bleibt, dass ich die Arakelov-Geometrie mit Hilfe der Harvand-Vorlesungsnotizen von Soulé [So2] gelernt habe, welche mir freundlicherweise zur Verfügung gestellt wurden.

Literatur

[BGS] Bost, J.-B., Gillet, H., Soulé, C.: Un analogue arithmétique du théorème de Bézout. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **312**, 845–848 (1991)

[Fa] Faltings, G.: Diophantine approximation on abelian varieties. Ann. Math. **133**, 549–576 (1991)

[FW] Faltings, G., Wüstholz, G. et al.: Rational points, 3. Auflage, Braunschweig: Vieweg 1992

[Fu] Fulton, W.: Intersection theory. Berlin Heidelberg New York: Springer 1984

[GS1] Gillet, H., Soulé, C.: Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metric, I and II. Ann. Math. **131**, 163–203 (1990)

[GS2] Gillet, H., Soulé, C.: Intersection on arithmetic varieties. Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. **72**, 94–174 (1990)

[GH] Griffiths, P., Harris, J.: Principles of algebraic geometry. New York: Wiley 1978

[EGAI] Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Eléments de géometrie algébrique I. Grundl. Math. Wiss., vol. 166. Berlin Heidelberg New York: Springer 1971

[Ha] Hartshorne, R.: Algebraic geometry. Berlin Heidelberg New York: Springer 1977

[Hi] Hindry, M.: Autour d'une conjecture de Serge Lang. Invent. Math. **94**, 575–603 (1988)

[Kr] Kramer, J.: Eine alternative Begründung der Néron-Tate Höhe. Appendix zur vorliegenden Arbeit.

[La] Lang, S.: Fundamentals of diophantine geometry. Berlin Heidelberg New York: Springer 1983

[Mi] Milne, J.S.: Abelian varieties in: Arithmetic geometry. G. Cornell, J. Silverman (eds.), pp. 103–150 Berlin Heidelberg New York: Springer 1986

[Né] Néron, A.: Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes. Ann. Math. **82**, 249–331 (1965)

[No] Northcott, D.G.: An inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties. Proc. Camb. Philos. Soc. **45**, 502–518 (1949)

[Ph1] Philippon, P.: Critères pour l'indépandance algébrique. Publ. Math. Inst. Haûtes Etud. sci. **64**, 5–52 (1986)

[Ph2] Philippon, P.: Sur des hauteurs alternatives. I. Math. Ann. 289, 255–283 (1991)

[St] Stoll, W.: About the value distribution of holomorphic maps into projective space. Acta Math. **123**, 83–114 (1969)

[So1] Soulé, C.: Géométrie d'Arakelov et nombres transcendents. Preprint

[So2] Soulé, C., Abramovich, D., Burnol, J.-F., Kramer, J.: Lectures on Arakelov geometry. Monographie. Cambridge: Cambridge University Press 1992

[We] Weil, A.: Arithmetic on algebraic varieties. Ann. Math. **53**, 412–444 (1951)