Prof. Dr. W. Gubler
Ch. Christensen

Universität Regensburg - WS2011/12
Abgabe in den Übungen der 51. Woche

Lineare Algebra I
Übung 9

Aufgabe 1:
S_9 ist die Menge aller Permutationen von $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\sum_{\pi \in S_9} \operatorname{sign}(\pi)$

b) $\sum_{\pi \in S_9} \operatorname{sign}(\pi)^2$

c) $\sum_{\pi \in S_9} \operatorname{sign}(\pi) \cdot 2^{a(\pi)}$, wobei $a(\pi) := |\{i \in \{1, 2, \ldots, 9\} | \pi(i) = i\}|$.
Hinweis: Berechnen Sie die Determinante einer geeigneten Matrix.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass die geraden Permutationen eine Untergruppe A_n der Gruppe S_n bilden. Wir nennen A_n die *alternierende Gruppe* zum Index n.

b) Beweisen Sie für eine beliebige Transposition τ, dass die Abbildung

$$A_n \to S_n\ , \quad \pi \mapsto \pi \circ \tau$$

injektiv ist und dass das Bild gleich den ungeraden Permutationen in S_n ist.

c) Wieviele Elemente besitzt A_n?

Aufgabe 3:
Beweisen Sie für $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, wobei $a_{ij} \in K$ für $1 \le i, j \le 3$ und K ein Körper, die Regel von Sarrus:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Aufgabe 4:
Zeigen Sie für $A \in M(n \times n, K)$, K ein Körper, dass

$$\det(A) = \det(A^t)$$

gilt.