

## Lineare Algebra I Übung 8

Mit  $K$  bezeichnen wir auf diesem Übungsblatt immer einen Körper.

### Aufgabe 1:

Gegeben sei ein  $K$ -Vektorraum  $V$  mit Basis  $b_1, \dots, b_n$  und  $T \in \text{GL}(n, K)$ . Zeigen Sie, dass es genau eine neue Basis  $b'_1, \dots, b'_n$  von  $V$  gibt, für die  $T$  die Transformationsmatrix des Basiswechsels ist.

### Aufgabe 2:

a) Gegeben ist die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie Basen von  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ , bezüglich welcher  $f$  durch die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  dargestellt wird.

b) Seien  $V$  bzw.  $W$  ein  $n$ - bzw.  $m$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $f$  eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$ , und  $A$  eine  $m \times n$  Matrix. Finden Sie eine zur Aussage

„Es gibt Basen  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  und  $w_1, \dots, w_m$  von  $W$ , bezüglich welcher  $f$  durch  $A$  dargestellt wird.“

äquivalente Aussage und beweisen Sie diese Äquivalenz.

### Aufgabe 3:

Gegeben sei der  $\mathbb{R}^4$  mit der Standardbasis und wir führen eine neue Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein. Berechnen Sie die neuen Koordinaten der Punkte

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } z = x + y$$

mit Hilfe der Transformationsmatrix des Basiswechsels.

### Aufgabe 4:

Sei  $L$  ein Körper und  $K$  ein Teilkörper von  $L$ . Das heißt es gilt  $K \subset L$  und  $K$  ist mit den Verknüpfungen von  $L$  eingeschränkt auf  $K$  selbst wieder ein Körper.  $L$  wird dann eine Körpererweiterung des Körpers  $K$  genannt. Zeigen Sie, dass  $L$  ein  $K$ -Vektorraum ist.