Prof. Dr. W. Gubler
Ch. Christensen

Universität Regensburg - WS2011/12
Abgabe in den Übungen der 49. Woche

Lineare Algebra I
Übung 7

Aufgabe 1:
Gegeben sei ein Körper K, $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ und wir bezeichnen mit $\varphi_A : K^n \to K^m$ die lineare Abbildung $\lambda \mapsto \varphi_A(\lambda) := A \cdot \lambda$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) φ_A is injektiv.

b) $\mathrm{Rang}(A) = n$.

c) $\exists C \in \mathrm{M}(n \times m, K)$ mit $C \cdot A = E_n$.

Formulieren Sie eine analoge Äquivalenz für φ_A surjektiv.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass die Äquivalenz und die Ähnlichkeit von Matrizen jeweils Äquivalenzrelationen sind.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die Inverse der komplexen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 0 & -1 & i \\ i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und verifizieren Sie $A \cdot A^{-1} = E_3 = A^{-1} \cdot A$.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie eine Basis des Lösungsraums des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & - & 8x_3 & - & 13x_4 & = & 0 \end{array}$$

analog zum Tübingenskript Beispiel 5.3.7.