Prof. Dr. W. Gubler
Ch. Christensen

Universität Regensburg - WS2011/12
Abgabe in den Übungen der 46. Woche

Lineare Algebra I
Übung 4

Aufgabe 1:
K sei ein Körper, $\lambda \in K$ und v ein Vektor aus dem K-Vektorraum V. Weiter sei 0_K die Null aus K und 0_V der Nullvektor aus V. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$

b) $0_K \cdot v = 0_V$

c) $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$

d) $\lambda \cdot v = 0_V \Rightarrow (\lambda = 0_K \ \vee \ v = 0_V)$

Aufgabe 2:
Beweisen Sie, dass $\mathbb{C}$ bezüglich der (normalen) Addition und der skalaren Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(\lambda, z) \mapsto \lambda \cdot z$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Zeigen Sie weiter, dass $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum isomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3:
Welche der folgenden Abbildungen ist $\mathbb{R}$-linear?

a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto -3x_1 + x_2.$

b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2.$

c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 - 1.$

d) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = a + ib \mapsto \overline{z} = a - ib.$

e) Spiegelung an einer Geraden durch 0 in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4:
Wir betrachten K-lineare Abbildungen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 : V \to W$ und $\psi, \psi_1, \psi_2 : W \to U$ von Vektorräumen über dem Körper K.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\varphi_1 + \varphi_2 : V \to W, \quad v \mapsto \varphi_1(v) + \varphi_2(v)$$
K-linear ist.

b) Zeigen Sie für die in (a) definierte Addition linearer Abbildungen die folgenden Rechenregeln:
$$\begin{aligned}(\psi_1 + \psi_2) \circ \varphi &= \psi_1 \circ \varphi + \psi_2 \circ \varphi \\ \psi \circ (\varphi_1 + \varphi_2) &= \psi \circ \varphi_1 + \psi \circ \varphi_2\end{aligned}$$

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}_K(V) := \{f : V \to V | f \text{ linear}\}$ ein Ring bezüglich $+, \circ$ bildet.

d) Ist $\mathrm{End}_K(V)$ ein kommutativer Ring?