

Lineare Algebra I Übung 2

Aufgabe 1:

Lösen Sie die folgenden zwei Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus.

a)	b)
$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$	$3x_1 - x_2 - x_3 = 0$
$x_1 - x_2 + x_4 = 1$	$x_1 - 3x_2 + x_4 = -1$
$2x_3 - 4x_4 = -4$	$x_1 - x_3 + x_4 = 0$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1$	$x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = -1$
	$x_4 - 4x_5 = -1$

Aufgabe 2:

Für welche Zahlenpaare (a, b) hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\2x_1 + (a + 2)x_2 + (b - 2)x_3 &= 3 \\-3x_1 + (2a - 3)x_2 + (a^2 - b^2 + 2b + 3)x_3 &= a - b - 1\end{aligned}$$

keine, genau eine, unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a und b .

Aufgabe 3:

Welche der folgenden Verknüpfungstafeln beschreiben eine Gruppe auf der Menge $\{a, b, c, d\}$:

a)	b)																																																		
<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">o</td><td style="padding: 5px;">a</td><td style="padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">c</td><td style="padding: 5px;">d</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">a</td><td style="padding: 5px;">a</td><td style="padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">c</td><td style="padding: 5px;">d</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">a</td><td style="padding: 5px;">d</td><td style="padding: 5px;">c</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">c</td><td style="padding: 5px;">c</td><td style="padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">a</td><td style="padding: 5px;">d</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">d</td><td style="padding: 5px;">d</td><td style="padding: 5px;">c</td><td style="padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">a</td></tr></table>	o	a	b	c	d	a	a	b	c	d	b	b	a	d	c	c	c	b	a	d	d	d	c	b	a	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">o</td><td style="padding: 5px;">a</td><td style="padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">c</td><td style="padding: 5px;">d</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">a</td><td style="padding: 5px;">d</td><td style="padding: 5px;">c</td><td style="padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">a</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">c</td><td style="padding: 5px;">d</td><td style="padding: 5px;">a</td><td style="padding: 5px;">b</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">c</td><td style="padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">a</td><td style="padding: 5px;">d</td><td style="padding: 5px;">c</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">d</td><td style="padding: 5px;">a</td><td style="padding: 5px;">b</td><td style="padding: 5px;">c</td><td style="padding: 5px;">d</td></tr></table>	o	a	b	c	d	a	d	c	b	a	b	c	d	a	b	c	b	a	d	c	d	a	b	c	d
o	a	b	c	d																																															
a	a	b	c	d																																															
b	b	a	d	c																																															
c	c	b	a	d																																															
d	d	c	b	a																																															
o	a	b	c	d																																															
a	d	c	b	a																																															
b	c	d	a	b																																															
c	b	a	d	c																																															
d	a	b	c	d																																															

Aufgabe 4:

Sei $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie folgende Behauptungen:

- a) Ist $H_2 \subseteq G_2$ eine Untergruppe, dann ist $\varphi^{-1}(H_2)$ eine Untergruppe von G_1 .
- b) Ist $H_1 \subseteq G_1$ eine Untergruppe, dann ist $\varphi(H_1)$ eine Untergruppe von G_2 .
- c) φ ist injektiv $\iff \ker(\varphi) = \{e\}$.