Prof. Dr. W. Gubler
Ch. Christensen

Universität Regensburg - WS2011/12
keine Abgabe

Lineare Algebra I
Übung 14

Aufgabe 1:
Sei $V := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3.

a) Zeigen Sie, dass durch
$$\langle p(x), q(x)\rangle := \int_0^1 p(t)q(t)dt$$
ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

b) Bestimmen Sie die Matrix des Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, x, x^2, x^3$.

c) Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis von V (Tipp: Erst am Ende normieren.)

Aufgabe 2:
Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $v = (1, 0, 0, 0)$ auf den Lösungsraum von $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$.

Aufgabe 3:
Es sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle ., . \rangle$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben durch
$$\varphi(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie $\varphi^*(\lambda)$ und verifizieren Sie, dass $A(\varphi^*) = A(\varphi)^t$ für die zugehörigen Matrizen bezüglich der Standardbasis gilt.

b) Zeigen Sie, dass (a) nicht mehr stimmt, wenn wir die Matrizen bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnen.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie für die reelle Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
eine bezüglich des Standardskalarproduktes orthonormierte Basis aus Eigenvektoren von A und eine orthogonale Matrix G, so dass $G^t A G$ eine Diagonalmatrix ist.