Prof. Dr. W. Gubler
Ch. Christensen

Universität Regensburg - WS2011/12
Abgabe in den Übungen der 5. Woche

Lineare Algebra I
Übung 13

Aufgabe 1:
Welche der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind bilinear?

a) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2)}$

b) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2$

c) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$

d) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (2x_1 + y_1)^2 - (x_1 - 2y_1)^2$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2:
Sei $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen.

a) Verifizieren Sie, dass die Funktion $b : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \times \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definiert durch $b(A, B) = \mathrm{Tr}(A \cdot B^t)$ für $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$, ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ ist.

b) Welche Matrizen stehen bzgl. b senkrecht auf allen Diagonalmatrizen?

c) Welche Matrizen stehen bzgl. b senkrecht auf allen symmetrischen Matrizen?

Aufgabe 3:
Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und h eine Sesquilinearform mit Matrix $H = (h_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V.

a) Zeigen Sie, dass für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^n$:

$$h\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right) = \lambda^t H \overline{\mu} = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \lambda_i \overline{\mu_j}$$

b) Es sei $v_1', \ldots, v_n'$ eine weitere Basis des Vektorraums V und H' die Matrix der Sesquilinearform h bezüglich dieser neuen Basis. Weiter sei T die Transformationsmatrix des Basiswechsels von der alten Basis $v_1, \ldots, v_n$ zur neuen Basis $v_1', \ldots, v_n'$ von V. Zeigen Sie, dass

$$H = T^t H' \overline{T}$$

Aufgabe 4:
Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und h eine Sesquilinearform mit Matrix H bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Zeigen Sie, dass h genau dann nicht ausgeartet ist, wenn die zu h assoziierte Matrix H invertierbar ist.